FACHARBEIT

+ Thema:
  Näherungsweise Bestimmung von Nullstellen
+ Fach:
  Mathematik
+ Autor:
  E. Moritz Hahn
+ Veröffentlichung:
  14. März 2001
+ Schule:
  Neues Gymnasium Oldenburg

Thema **Seite**

1 Einleitung

Ein Teil des Unterrichts der letzten Schuljahre war, durch analytische Verfahren die Nullstellen einer Funktion zu bestimmen. Dadurch, dass Gleichungen auf die Form $g(x) = 0$ gebracht wurden, konnte häufig mit geringem Aufwand die Lösungsmenge bestimmt werden, besonders dann, wenn $g(x)$ eine ganzrationale Funktion bis vierten Grades war, da für solche Gleichungen allgemeine Lösungsformeln existieren.

Existiert eine solche Lösungsformel hingegen nicht, ist es oft relativ aufwendig, eine Nullstelle genau zu bestimmen. Auch möchte man oft, wenn man erfährt, dass eine Lösung einer Gleichung eine irrationale Zahl ist, eine Näherung dieser wissen, wozu man diese dann etwa von einem Taschenrechner bestimmen lassen kann, denn ein ungefährer Wert ergibt sich aus der Lösung der Gleichung nicht. (Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 2 = 0$ sind z.B. $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ ist ungefähr 1.414.)

Ein völlig anderer Ansatz zur Bestimmung von Nullstellen ist das der näherungsweisen Bestimmung. Dabei wird die Lösung nicht durch analytisches Vorgehen gefunden, sondern iterativ, d.h. durch die wiederholte Anwendung genau festgelegter Arbeitsschritte. In der vorliegenden Facharbeit sollen einige dieser Verfahren vorgestellt und hinsichtlich ihrer Effizienz verglichen werden. Außerdem soll noch eine praktische Anwendungsmöglichkeit gezeigt werden: Die Bestimmung der n-ten Wurzel.

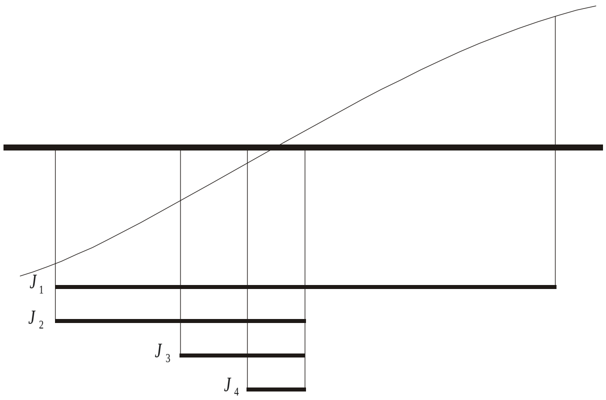
2 Nullstellensatz

(vgl. Analysis II., S. 216)

Um ein näherungsweises Verfahren zur Nullstellenbestimmung sinnvoll anwenden zu können, sollte man sich zuerst vergewissern, dass die Funktion, deren Nullstellen man zu finden versucht, überhaupt welche besitzt. Außerdem ist es hilfreich zu wissen, in welchem Bereich des Definitionsbereiches der Funktion sich diese befinden.

Der Nullstellensatz besagt nun: Wenn eine Funktion g in einem Intervall $[a;b]$ stetig ist und a und b verschiedene Vorzeichen haben, so hat diese Funktion in dem Intervall mindestens eine Nullstelle, es gibt mindestens ein $x_* \in [a;b]$: $g(x_*) = 0$.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt nun durch die Konstruktion einer Intervallschachtelung durch Intervallhalbierung: Es sei J_1 das Intervall $[a;b]$, $\operatorname{sgn}(a) \neq \operatorname{sgn}(b)$ und die reelle Zahl m_1 der Mittelwert der oberen und unteren Grenze jenes Intervalls (also von a und b). Wenn nun $g(m_1) \neq 0$ (sonst wäre die Lösung ja bereits gefunden) ist das Intervall J_2 nun $[a;m_1]$, wenn a und m_1 verschiedener Vorzeichen sind; andernfalls – also wenn m_1 und b verschiedener Vorzeichen sind – ist J_2 $[m_1;b]$. Nun ist m_2 die Mitte von J_2, J_3 wiederum die Hälfte von J_2, in der die linke bzw. die rechte Grenze und m_2 verschiedene Vorzeichen besitzen, usw. Das Zentrum dieser Intervallschachtelung ist eine reelle Zahl x_*, m konvergiert gegen diese Zahl. Es muss $g(x_*)=0$ sein, da es sonst wegen $\lim_{x\to x_*} g(x)=g(x_*)$ eine Umgebung x_* geben müsste, in der $g(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $f(x_*)$ hat, was aufgrund der Konstruktion der Intervallschachtelung unmöglich ist (Vollständigkeit von R).



Ist eine Funktion in dem Intervall $[a;b]$ nicht stetig, so kann es durchaus sein, dass in diesem auch bei Erfüllung der übrigen Bedingungen des Satzes keine Nullstellen existieren. Dies kann z.B. dann der Fall sein, wenn die Funktion in dem Intervall einen „Sprung" vom positiven in den negativen Bereich oder umgekehrt macht (wie etwa an der Stelle 0 der Funktion $g(x)=x^{-1}$).

Es kann aber auch dann eine Nullstelle in einem Intervall vorhanden sein, wenn der Nullstellensatz nicht erfüllt ist und zwar dann, wenn der Graph der Funktion die x-Achse an der Nullstelle nur berührt, wie etwa bei der Funktion $g(x)=x^2$ bei 0.

3 Verfahren der Nullstellenbestimmung

3.1 Biselektion

(vgl. Analysis II., S. 216 f, Lernpaket Mathematik S. 92)

Der Beweis des Nullstellensatzes ist gleichzeitig ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle. Es wird als Intervallhalbierungs- oder Biselektionsverfahren bezeichnet. Die Nullstelle befindet sich innerhalb des zuletzt konstruierten Intervalls der Intervallschachtelung. Je mehr Intervalle konstruiert werden, desto genauer lässt sich ein Näherungswert für x_* angeben. Gesichert sind diejenigen Nachkommstellen des Näherungswertes, - d.h. diese sind korrekt und ändern sich bei der Fortsetzung des Verfahrens nicht mehr - in denen untere und obere Grenze des zuletzt konstruierten Intervalls übereinstimmen (Wenn z.B. die eine Grenze 4,3457... und die andere 4.3412... ist, so ist 4,34 gesichert).

3.1.1 Triselektion

(vgl. Lernpaket Mathematik S. 92)

Das Verfahren der Biselektion lässt sich ein wenig beschleunigen, wenn man die Intervalle nicht in zwei, sondern in drei Teile teilt, die auf Vorzeichenwechsel untersucht werden. Nun muss allerdings auch pro Schritt ein Funktionswert mehr berechnet werden. Auf Grund des erhöhten Rechenaufwandes eignet sich die prinzipiell mögliche Zerlegung des Intervalls in mehr als drei Teile meist nicht.

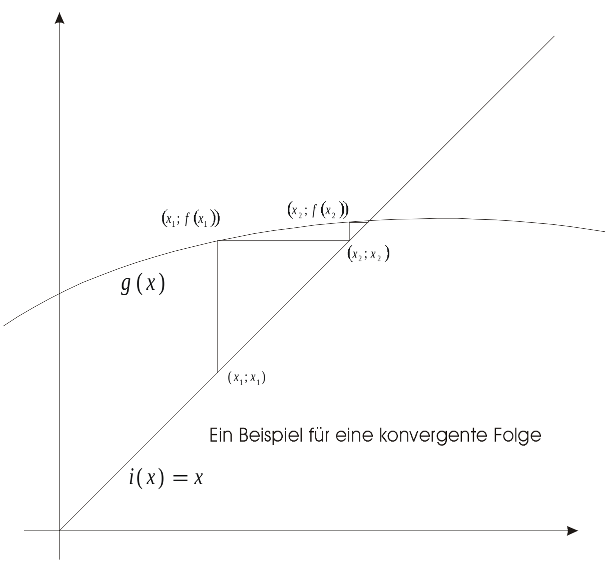
3.1.2 Monte-Carlo-Methode

(vgl. Lernpaket Mathematik S. 93)

Im Unterschied zur Biselektion wird bei diesem Verfahren der Wert m_n jeweils zufällig aus dem zuletzt betrachteten Intervall gewählt. Je nach Art der Funktion (und dem Zufall) erhält man so bessere oder schlechtere Konvergenz, allerdings meist schlechtere. Um bessere Konvergenz zu erreichen, sollte man prinzipiell andere Verfahren der Nullstellenbestimmung verwenden.

3.2 Allgemeines Iterationsverfahren

(vgl. Schröder-Uchtmann S. 284 ff., Analysis II. S. 220,
Formelsammlung S. 33: Mittelwertsatz der Differentialrechnung)



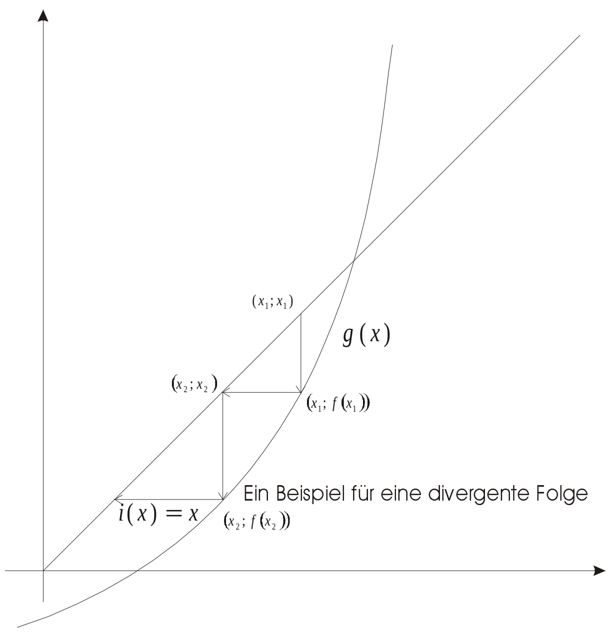
Ein Beispiel für eine konvergente Folge

Ein wesentlich anderes und auch wesentlich schnelleres Verfahren ist das allgemeine Iterationsverfahren. Um dieses anwenden zu können, muss man eine Gleichung $g(x)=0$ auf die Form $f(x)=i(x)$ wobei $i(x)=x$ ist bringen. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Funktionen sind nun die Lösungsmenge der Funktion $g(x)=0$, eine solche Lösung wird auch ein Fixpunkt von f genannt. Auf folgende Art kann man nun eine Lösung näherungsweise bestimmen: Zuerst muss eine Stelle x_1 in der Nähe des Schnittpunktes, die man etwa aus einer Zeichnung des Graphen der Funktion abgeschätzt hat, notiert werden. Nun betrachtet man den Punkt $(x_1; x_1)$ auf $i(x)$. Der Punkt $(x_1; f(x_1))$ befindet sich nun unter oder über diesem auf der Funktion $f(x)$. Es sei nun $x_2 = f(x_1)$. Der Punkt $(x_2; x_2)$ befindet sich wiederum auf $i(x)$. Dieses Verfahren setzt man nun fort mit x_3, usw., es ergibt sich daraus die Iterationsvorschrift $x_{x+1} = f(x_n)$.

Diese Folge konvergiert entweder, nähert sich also einem Fixpunkt von $f(x)$ und damit auch einer Nullstelle von $g(x)$ an, wenn $|f'(x)| < 1$ in der Nähe des Schnittpunktes, oder divergiert, entfernt sich also von der Nullstelle wenn $|f'(x)| > 1$ in der Nähe des Schnittpunktes.

Dies ist aus folgendem Grund so: Innerhalb eines Intervalls befindet sich eine Nullstelle. Die Iterationsvorschrift lautet: $x_{x+1} = f(x_n)$. Wenn a Fixpunkt von f ist gilt auch: $x_{x+1} - a = f(x_n) - f(a)$ und damit auch: $|x_{x+1} - a| = |f(x_n) - f(a)|$. Der Mittelwertsatz besagt: Ist f in $[x_1; x_2]$ differenzierbar, dann gibt es innerhalb von $[x_1; x_2]$ eine Stelle z (die allgemein nicht genau zu bestimmen ist) für die gilt: $f(x_2) - f(x_1) = f'(z) \cdot (x_2 - x_1)$. Aus diesem Satz folgt also: $|x_{x+1} - a| =$

$$|f'(z) \cdot (x_n - a)| = |f'(z)| \cdot |x_n - a|.$$



Ein Beispiel für eine divergente Folge

Wenn eine Konstante k, $0 \le k < 1$ existiert, die auf dem gesamten betrachteten Intervall, innerhalb dessen sich die Nullstelle befindet, größer oder gleich dem Betrag der Steigung von f ist ($|f'(x)| \le k, x \in [a; b]$), so ist diese Zahl natürlich auch größer als $|f'(z)|$ und es gilt somit: $|x_{n+1} - a| \le k|x_n - a|$ für alle $n \in N$.

Mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion kann man sogar beweisen, dass gilt: $|x_{n+1} - a| \le k^n |x_1 - a|$. Begonnen wird mit $n = 1$: $|x_2 - a| \le k \cdot |x_1 - a|$. Somit gilt auch: $k \cdot |x_2 - a| \le k^2 \cdot |x_1 - a|$, also $|x_3 - a| \le k \cdot |x_2 - a| \le k^2 \cdot |x_1 - a|$. Zu beweisen ist nun die Aussage für $n+1$, also: $|x_{n+2} - a| \le k^{n+1} \cdot |x_1 - a|$, und dies geschieht folgendermaßen: Als erstes erfolgt die Multiplikation der Ungleichung für $n = 1$ mit k: $k \cdot |x_{n+1} - a| \le k^{n+1} |x_n - a|$. Das Folgende ist demnach wahr: $|x_{n+2} - a| \le k \cdot |x_{n+1} - a| \le k^{n+1} \cdot |x_1 - a|$ und damit ist die Aussage bewiesen.

Wegen $0 \le k < 1$ ist k^n eine Nullfolge, deshalb ebenfalls $k^n \cdot |x_1 - a|$ und $|x_{n+1} - a|$. Der Betrag der Differenz zwischen x_{n+1} und a, also deren Abstand, geht demnach gegen Null. Folglich ist der Grenzwert von $x_{n+1} = f(x_n)$ ein Fixpunkt von f und somit eine Lösung von $g(x) = 0$.

3.3 Newton Verfahren

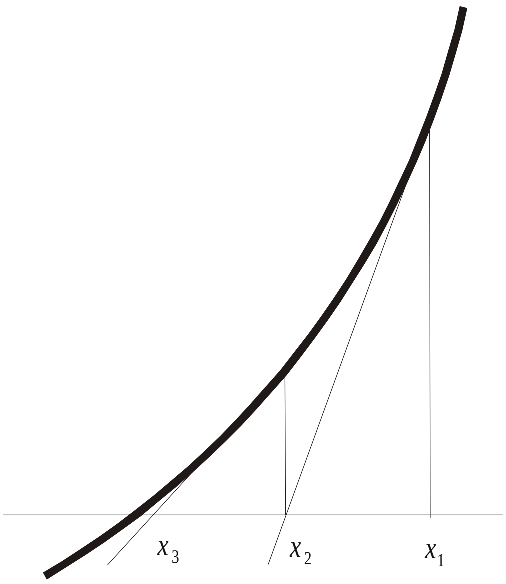
(vgl. Schröder-Uchtmann S. 289 ff., Analysis II. S. 220 ff.,
Analysis II., S. 217 f.)ssss

Die Folge k^n geht um so schneller gegen Null, (d.h. die Konvergenzgeschwindigkeit ist umso höher), je näher k an Null liegt, je geringer also die maximale Steigung von f im Intervall $[a;b]$ ist, in dem die Nullstelle sich befindet. Die Konstante k ist dann nah bei Null, wenn der Anfangswert x_1 in nicht allzu großem Abstand von a gewählt wurde und die Steigung von $f(a)$ möglichst gering ist. Sehr gut wäre also, wenn $f'(a) = 0$ wäre. Ein Iterationsverfahren, bei dem dies so ist, wird ein Verfahren zweiter Ordnung genannt. Das Newton-Verfahren ist ein solches. Es soll im Folgenden hergeleitet werden.

Zu bestimmen ist die Nullstelle a der Funktion g, das x für das gilt: $g(x) = 0$. Die Lösung dieser Gleichung ist auch dann noch a, wenn die Gleichung mit einer Funktion $c(x)$ mit $c(a) \neq 0$ multipliziert wird: $c(x) \cdot g(x) = 0$. Die Gleichung wird auf die iterationsfähige Form gebracht: $x = x - c(x) \cdot g(x)$. Die Ableitung der dazugehörigen Iterationsfunktion f ist $f'(x) = 1 - c'(x) \cdot g(x) - c(x) \cdot g'(x)$, für a also: $f'(a) = 1 - c'(a) \cdot g(a) - c(a) \cdot g'(a)$ und da $g(a) = 0$: $f'(a) = 1 - c(a) \cdot g'(a)$. Es sollte $f'(a) = 0$ sein, also: $1 - c(a) \cdot g'(a) = 0$, aufgelöst nach c: $c(a) = \dfrac{1}{g'(a)}$. Also muss

$c(x)=\dfrac{1}{g'(x)}$ sein. Die Iterationsfunktion des Newton-Verfahrens lautet damit: $f(x)=x-\dfrac{g(x)}{g'(x)}$.

Damit dieses Verfahren angewendet werden kann, müssen noch einige Voraussetzungen erfüllt sein. Da sonst eventuell durch Null geteilt würde, muss $g'(x)\neq 0$ sein für die gesamte Argumentmenge für x, also darf kein Wert, den $g'(x)$ während der Iteration annimmt, Null sein. Wenn $g'(a)\neq 0$ und g stetig an a ist, kann dies durch die Wahl eines nahe genug bei a liegenden Startwertes x_1 erreicht werden, da es dann eine Umgebung von $g'(a)$ gibt, in der g' ungleich Null ist. Außerdem muss natürlich f differenzierbar sein, was nur dann der Fall ist, wenn g zweimal differenzierbar ist (wegen $f'(x)=1-\dfrac{g'(x)^2-g(x)\cdot g''(x)}{(g'(x))^2}$). Damit f' stetig bei a ist, muss auch g'' an dieser Stelle stetig sein.



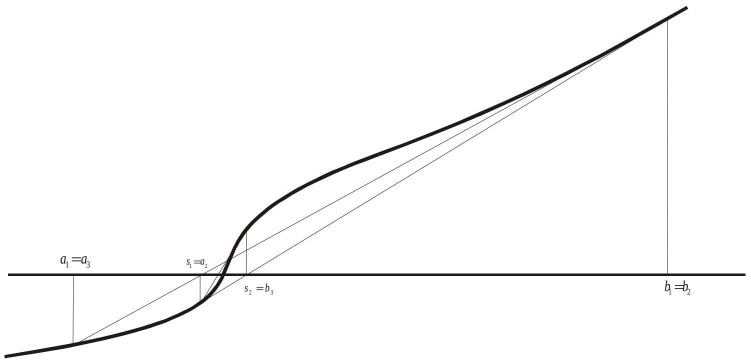
Das Newton-Verfahren lässt sich auch geometrisch herleiten. Um die Nullstelle einer Funktion $g(x)$ in einem Intervall $[a;b]$ zu bestimmen, muss eine relle Zahl x_1 als entweder a oder b bestimmt werden. Es wird nun die Tangente im Punkt $P_1(x_1; f(x_1))$ bestimmt. Die Stelle des Schnittpunktes dieser mit der x-Achse sei x_2, sie liegt – wenn x_1 nahe genug an der Nullstelle der Funktion gewählt wurde – in den meisten Fällen näher an der Nullstelle als x_1. Es wird nun die Tangente im Punkt $P_2(x_2; f(x_2))$ bestimmt, die Stelle des Schnittpunktes dieser mit der x-Achse sei wiederum x_3. So wird nun mit x_n und $P(x_n; f(x_n))$ fortgefahren.

Die Ableitung der Funktion $g(x)$ ist $g'(x)$. Mit der Punkt-Steigungsformel ergibt sich die Gleichung für die Tangente: $t(x)=g'(x)\cdot(x-x_n)+g(x_n)$. In deren Schnittpunkt mit der x-Achse ist $t(x_{sp})=0$ und damit $t(x_{n+1})=0$, also ist $0=g'(x_{n+1})\cdot(x_{n+1}-x_n)+g(x_n)$, aufgelöst nach x_{n+1}: $x_{n+1}=x_n-\dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)}$. Dies ist damit die Iterationsvorschrift. Sie ist identisch mit der aus dem allgemeinen Iterationsverfahren hergeleiteten.

3.4 Regula Falsi

(vgl. Das Sekantenverfahren - http://www.uni-ulm.de/~s_rschw3/facharb/5.htm, Schülerduden Mathematik, Regula Falsi)

Oft ist die Ableitung einer Funktion nur schwer zu bestimmen oder gar nicht existent, so dass das Newton-Verfahren nur mit hohem Aufwand oder gar nicht anwendbar ist. Ein Verfahren, das in diesem Fall eine Konvergenz bietet, die zwar meist schlechter als die des Newton-Verfahrens, aber meist besser als die des allgemeinen Iterationsverfahrens ist, ist das Sekantenverfahren. Anders als beim Newton-Verfahren wird hier nicht die Nullstelle der Tangente eines Punktes auf der Funktion bestimmt, sondern die der



Sekante von einem Punkt $[a_n; f(a_n)]$ und einem Punkt $[b_n; f(b_n)]$. Es sind $f(a_n)$ und $f(b_n)$ von verschiedenem Vorzeichen und $a_n < b_n$. Die gesuchte Nullstelle befindet sich innerhalb von $[a_n; b_n]$. Den x-Wert des Schnittpunkts dieser Sekante mit der x-Achse nimmt nun b_{n+1} an. Je geringer die Differenz zwischen a_n und b_n ist, desto ähnlicher wird die Sekante der Tangente an a_n oder b_n. Bei einer Variante dieses Verfahrens, der Regula Falsi, wird zusätzlich überprüft, ob der Funktionswert an der Nullstelle der Sekante positiv oder negativ ist. Nun nimmt entweder a_{n+1} oder b_{n+1} den x-Wert der Nullstelle an, je nachdem welche der beiden das gleiche Vorzeichen wie die Nullstelle der Sekante besitzt.

Zur Herleitung der Iterationsvorschrift des Verfahrens: Die Gleichung der Sekante von $[a; f(a)]$ und $[b; f(b)]$ ist nach der Punkt-Steigungsformel: $f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$. Für ihren Schnittpunkt mit der x-Achse ergibt sich: $x_s = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}$. Die Iterationsvorschrift für das Sekantenverfahren lautet somit:

$b_{n+1} = a - \frac{f(\mathrm{a})(b_n - a)}{f(b_n) - f(a)}$ (Hier ist a ohne Index geschrieben, da es sich ja nicht verändert). Die Iterationsvorschrift für Regula Falsi ist etwas komplexer: $x_{sn} = a_n - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, $\operatorname{sgn}(g(a_n)) = \operatorname{sgn}(g(x_{sn})) \Rightarrow a_{n+1} = x_{sn}, b_{n+1} = b_n$, $\operatorname{sgn}(g(b_n)) = \operatorname{sgn}(g(x_{sn})) \Rightarrow b_{n+1} = x_{sn}, a_{n+1} = a_n$.

Ein Beispiel zu diesem Verfahren: Zu bestimmen ist die Nullstelle der Funktion $g(x) = \sin x$ mit Hilfe der Regula Falsi. Damit ist $x_{sn} = \frac{\sin a_n \cdot (b_n - a_n)}{\sin b_n - \sin a_n}$. Eine Nullstelle der Funktion liegt zwischen 2 und 4. Also ist $a_1 = 2$ und $b_1 = 4$. Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse ist $x_{s1} = 3{,}091528083$. Da $g(2) \approx 0{,}909 > 0$ ist $a_2 = x_{s1}$ und $b_2 = b_1$. Der Schnittpunkt der nächsten Tangente ist nun $x_{s2} = 3{,}147874957$. Für die nächsten Tangenten ergibt sich: 3,141590358, 3,141592654, 3,141592654. Nach fünf Schritten sind also bereits mindestens neun Nachkommastellen gesichert.

Die Regula Falsi hat gegenüber dem Sekantenverfahren den Vorteil einer häufig höheren Konvergenzgeschwindigkeit. Außerdem konvergiert dieses Verfahren oft auch bei Funktionen, bei denen das Sekantenverfahren nicht konvergiert; es ist nämlich bei dem Sekantenverfahren nicht gewährleistet, dass die Nullstelle von den Intervallgrenzen eingeschlossen bleibt, die Konvergenz ist besonders dann zweifelhaft, wenn die Anfangsintervallgrenzen ungünstig gewählt wurden. Ein Beispiel zur Verdeutlichung dieser Tatsache findet sich bei „6 Vergleich der Verfahren“.

Eine Anmerkung zu der Terminologie: In der vorliegenden Arbeit wird das Näherungsverfahren mit einem fixen und einem beweglichen Punkt als das Sekantenverfahren bezeichnet, das mit zwei beweglichen Punkten als die Regula Falsi. Dies geschieht entsprechend der angegebenen Literatur. Die Bezeichnungen scheinen leider nicht eindeutig zu sein, da in anderen Büchern bzw. Internetseiten als den benutzten die Verfahren z.T. anders bezeichnet wurden.

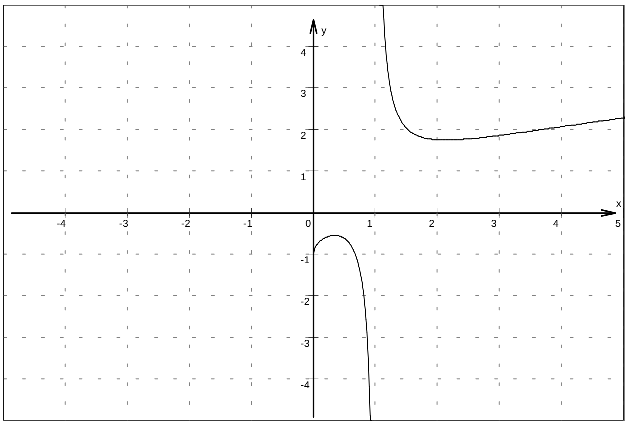
4 Vorgegebene Aufgaben

1.) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktionen

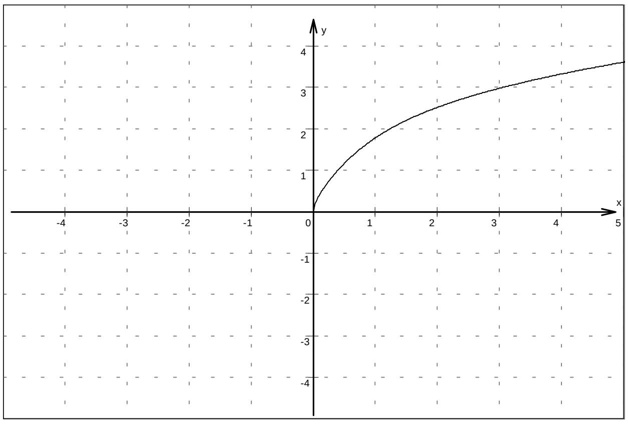
Die Funktionen wurden hier wie in den übrigen Teilen der Arbeit mit g bezeichnet, um Verwechslungen mit den Iterationsfunktionen f zu vermeiden

a) $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2 - 1}$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist $R^+ \setminus \{1\}$. Aufgrund der Zeichnung eines



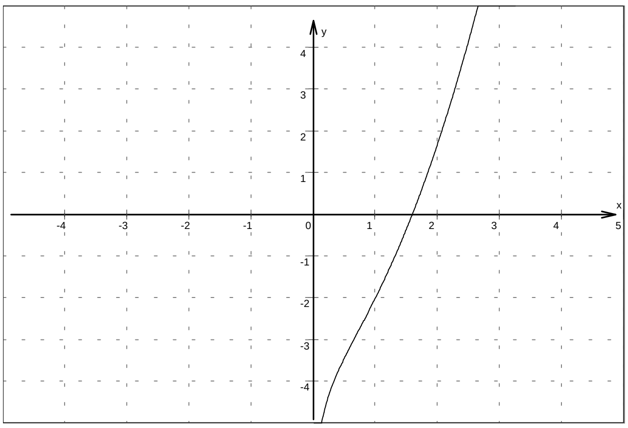
Graphen ist zu vermuten, dass die Funktion keine Nullstellen, sondern nur eine vertikale Asymptote bei 1 hat. Folgende Überlegungen bestätigen dies: Für $0 \le x < 1$ ist $0 \le \sqrt{x} < 1$ und $\frac{1}{x^2 - 1} \le -1$. Damit ist $g(x) < 0$ in diesem Bereich. Für $x > 1$ ist $\sqrt{x} > 1$ und $\frac{1}{x^2 - 1} > 0$ und damit $g(x) > 1$. In den Intervallen $[0;1[$ und $]1;+\infty[$ kann sich also keine Nullstelle befinden, in der Definitionslücke 1 natürlich ebenfalls nicht. Dies zeigt deutlich die Wichtigkeit der Forderung des Nullstellensatzes, dass $g(x)$ in $[a;b]$ stetig sein soll, denn $g(0) = -1$ und $g(1{,}5) \approx 2.02$, womit die übrigen



Bedingungen des Nullstellensatzes erfüllt sind.

b) $g(x) = \arctan x + \sqrt{x}$

Der Definitionsbereich der Funktion ist R^+. Die Skizze der Funktion lässt eine Nullstelle bei $x_0 = 0$ vermuten, was sich auch rechnerisch bestätigen lässt: $\arctan 0 + \sqrt{0} = 0$. Sowohl $\arctan x$ als auch $\sqrt{x}$ sind im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend,



weshalb dies auch für $g(x) = \arctan x + \sqrt{x}$ zutrifft. Aus diesem Grund kann die Funktion keine weiteren Nullstellen besitzen.

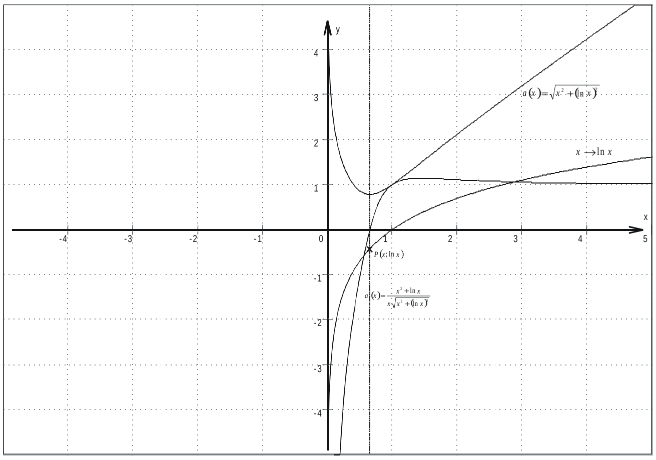
c) $g(x) = x^2 + \ln x - 3$

Der Definitionsbereich der Funktion ist R_*^+. Sie ist streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich, da sowohl x^2 als auch $\ln x$ dies sind. Es kann daher $g(x)$ höchstens eine Nullstelle haben. Eine Skizze der Funktion lässt eine Nullstelle im Intervall $[1;2]$ vermuten. Da $g(1) = -2$ und $g(2) \approx 1{,}6931$ und die Funktion stetig in diesem Intervall ist, muss nach dem Nullstellensatz in $[1;2]$ eine Nullstelle vorhanden sein.

Um die Nullstelle nun genauer zu bestimmen, bietet sich das Newton-Verfahren an, da die Funktion ohne großen Aufwand differenziert werden kann. Der Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren ist erfüllt: Es ist $g'(1) = 2$. Im gesamten Definitionsbereich ist $g'(x) = 2x + \ln x$ streng monoton steigend, a ist größer als 1. Deshalb muss $g'(a)$ ungleich Null sein.

Die Newton-Folge für diese Funktion muss nun gebildet werden. Die Iterationsvorschrift ist $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 + \ln x_n - 3}{2x_n + \ln x_n}$. Die ersten fünf Glieder der Folge sind (auf vier Stellen genau, gerundet): (2, 1.6392, 1.5912, 1.5921, 1.5921). Die Nullstelle befindet sich also bei $x_0 \approx 1{,}5921$.

2.) In welchem Punkt kommt der Graph der Logarithmusfunktion $x \to \ln x$ dem Ursprung des Koordinatensystems am nächsten?



Damit diese Aufgabe gelöst werden kann, muss zuerst der Abstand eines Punktes $P(x; \ln x)$ vom Ursprung des Koordinatensystems an einer beliebigen Stelle x im Definitionsbereich der Funktion ($D = R^+$) bestimmt werden. Gesucht werden muss also eine Funktion, die jedem $x \in D$ den Abstand des Punktes auf der Funktion $x \to \ln x$ an dieser Stelle vom Koordinatenursprung zuordnet. Nach dem Satz des Pythagoras ist dies die Funktion $a(x) = \sqrt{x^2 + (\ln x)^2}$. An der Stelle, an der diese Funktion ein Minimum annimmt, befindet sich der gesuchte Punkt. Zur Bestimmung dieses Punktes muss die Ableitung der Funktion bestimmt werden. Diese ist $a'(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x\sqrt{x^2 + (\ln x)^2}}$. Aus dem

Graphen dieser Funktion ist erkennbar, dass diese Funktion eine Nullstelle zwischen $0{,}5$ und 1 hat. Da die Ableitung von a' sehr kompliziert zu bestimmen wäre, ist das Newton-Verfahren für diesen Fall ungeeignet. Eine simple Umstellung des allgemeinen Iterationsverfahrens nach $x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n^2 + \ln x_n}{x\sqrt{x_n^2 + (\ln x_n)^2}} \right)$ konvergiert nicht. Eine Näherung für die Nullstelle soll daher mit der Regula Falsi bestimmt werden. Die Formel für den Sekantenschnittpunkt ist:

$$x_{sn} = a_n - \frac{\left(\frac{a_n^2 + \ln a_n}{a_n\sqrt{a_n^2 + (\ln a_n)^2}} \right)(b_n - a_n)}{\left(\frac{b_n^2 + \ln b_n}{b\sqrt{b^2 + (\ln b_n)}} \right) - \left(\frac{a_n^2 + \ln a_n}{a_n\sqrt{a_n^2 + (\ln a_n)^2}} \right)}$$

Es ergibt sich für x_{s15} bei einem Anfangsintervall von $[0{,}5;1]$ der auf zehn Stellen genaue Näherungswert 0,6529186404. Es ist $\ln 0{,}6529186404 = -0{,}426302751$. Der gesuchte Punkt ist damit $P(0{,}6529186404;-0{,}426302751)$. Der minimale Abstand beträgt $\sqrt{0{,}6529186404^2 + (\ln 0{,}6529186404)^2} = 0{,}7797671361$.

5 Anwendung des Newton-Verfahrens: Wurzeln n-ten Grades

(Idee nach Schröder-Uchtmann S. 291: Iterationsverfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel)

Mit Hilfe des Newton-Verfahren kann man schnell Näherungen für die n-te Wurzel einer Zahl a erhalten. Wenn x_0 diese Wurzel ist, so gilt: $\sqrt[n]{a} = x_0$. Diese Gleichung wird nun potenziert: $a = x_0^n$. Nun wird a subtrahiert: $x_0^n - a = 0$. Die positive Nullstelle x_0 der Funktion $g(x) = x^n - a$ ist also die Wurzel aus a. Deren Ableitung ist $g'(x) = nx^{n-1}$. In die Newton-Iterationsformel eingesetzt ergibt sich: $f(x) = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}}$.

6 Vergleich der Verfahren

Im folgenden Abschnitt der Facharbeit werde ich anhand einer Tabelle die Konvergenz der einzelnen beschriebenen Näherungsverfahren bei unterschiedlichen Funktionen untersuchen. Außerdem werde ich die Gründe für die unterschiedliche Konvergenz darstellen. Die Verfahren Triselektion und Monte-Carlo werden nicht untersucht, da sie wegen des erhöhten Rechen- und Prüfaufwands bzw. wegen der unsicheren und geringen Geschwindigkeit der Konvergenz nur selten sinnvoll einzusetzen sind. Das Intervallhalbierungsverfahren wurde hingegen aufgenommen, um dessen Langsamkeit gegenüber den anderen Verfahren zu demonstrieren.

Bei einem Vergleich der Verfahren muss auch berücksichtigt werden, dass für die Iterationen selbst unterschiedlicher Aufwand notwendig ist. Zwar hat das Newton-Verfahren meist eine bessere Konvergenz als das allgemeine Iterationsverfahren oder die Regula Falsi; jedoch muss auch berücksichtigt werden, dass zur Anwendung dieses Verfahrens zusätzlich noch die Ableitung bestimmt werden muss.

Die Bestimmung der Näherungswerte wurde mit Hilfe eines Casio CFX-9850G Taschenrechners vorgenommen. Dies geschah zum Teil mit der „PRGM"-Funktion, d.h. mit Hilfe von mir geschriebener Programme. Der mit Kommentaren versehene Quelltext dieser befindet sich im Anhang. Der Taschenrechner verfügt zwar bereits im Ausgangszustand über eine Funktion zur Reihenberechnung, jedoch eignete sich jene für die Berechnung von Näherungswerten nach der Regula Falsi weniger, da bei dieser Bedingungen zu überprüfen sind, was mit der Rekursionsfunktion des Taschenrechners zwar nicht unmöglich aber sehr kompliziert ist. Außerdem lässt sich die Erstellung der Rekursionsformeln für die Regula Falsi, das Sekantenverfahren und das Intervallhalbierungsverfahren mit der Programmfunktion automatisieren (die Iterationsformel des Newton-Verfahrens kann hingegen nicht automatisch bestimmt werden; der Taschenrechner kann den Differentialquotienten nur näherungsweise bestimmen, was bei einem Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten zu ungenau wäre).

Aus diesen Gründen schien mir die Erstellung der Programme also sinnvoll. Die dazu verwendete „PRGM"-Funktion kann nach dem Einschalten des Gerätes mit der Taste „B" (log) aufgerufen werden. Dort können nun Programme erstellt, verändert, gestartet, usw. werden.

Durch Aufruf eines der Programme mit den Namen „REGFALSI", „SEKVERF", „INTERVAL" kann nun nach der Eingabe der äusseren Grenzen eines Intervalls $[a;b]$, in dem sich die Nullstelle befindet, bzw. nach Eingabe eines Startwerts x_1 die Nullstelle der Funktion bestimmt werden, die in dem Menüpunkt „GRAPH" (Taste „5") unter „Y1"eingegeben wurde. Es muss zusätzlich noch die Anzahl der Nachkommstellen angegeben werden, die nach der Iteration gesichert sein sollen. Das Programm nimmt keinerlei Überprüfung vor, ob die Iterationsfolge überhaupt konvergiert oder ob der

Nullstellensatz erfüllt ist. Konvergiert die Folge nicht, kann das Programm – falls es nicht schon so mit einer Fehlermeldung beendet wird – durch das Drücken der „AC/ON“-Taste beendet werden.

Als erstes will ich das Verhalten der einzelnen Verfahren anhand der Nullstelle der Funktion $g(x) = \sin x$, die sich zwischen den Funktionswerten 3 und 4 befindet, untersuchen. Die Nullstelle soll auf 9 Stellen genau bestimmt werden (die korrekten Stellen sind unterstrichen):

Biselektion $J_1 = [3;4]$	Allgemeines Iterationsverfahren $x_1 = 4$ $x_{n+1} = x + \sin x$	Newton-Verfahren $x_1 = 4$ $x_{n+1} = x_n - \frac{\sin x_n}{\cos x_n}$	Sekanten-verfahren $a_1 = 3$ $b_1 = 4$ $b_{n+1} = a_n - \frac{\sin a_n (b_n - a_n)}{\sin b_n - \sin a_n}$	Regula Falsi $a_1 = 3$ $b_1 = 4$ $x_{sn} = a_n - \frac{\sin a_n (b_n - a_n)}{\sin b_n - \sin a_n}$
3,5	3,243197505	2,842178718	3,157162792	3,157162792
3,25	3,141767384	3,15087294	3,141546256	3,141546256
3,125	3,141592654	3,141592387	3,141592809	3,141592655
3,1875	3,141592654	3,141592654	3,141592653	3,141592654
3,15625		3,141592654	3,141592654	3,141592654
3,140625			3,141592654	
3,1484375				
…				
3,141592654				
3,141592654				
31 Schritte	4 Schritte	5 Schritte	6 Schritte	5 Schritte

Die extrem schlechte Konvergenz der Biselektion fällt sofort auf: Zur Berechnung der Nullstelle auf neun Nachkommastellen mit Hilfe dieses Verfahrens werden 31 Schritte, also fast acht mal so viele wie bei dem allgemeinen Iterationsverfahren benötigt.

Es fällt weiterhin auf, dass dieses Verfahren in diesem Fall sogar bessere Ergebnisse als das Newton-Verfahren liefert. Dies ist aus folgendem Grund so: Die Steigung der Iterationsfunktion $f_{al\lg emein}$ an der Stelle 4 ist $f_{al\lg emein}'(4) \approx 0{,}346$ und damit relativ gering. Die Steigung der Newton-Iterationsfunktion an der gleichen Stelle ist $f_{Newton}'(4) = 1 - \frac{\cos^2 4 + \sin^2 4}{\cos^2 4} \approx -1{,}340$, der Betrag dieser also deutlich höher. Es nimmt $f_{al\lg emein}'$ an der Nullstelle, die bei π liegt, ebenso wie das Newton-Verfahren den Wert 0 an (wegen $1 + \cos \pi = 0$). Damit ist hier das Allgemeine Iterationsverfahren (in dieser Umformung) ebenfalls ein Iterationsverfahren zweiten Grades. Es konvergiert in diesem Fall schneller als das Newton-Verfahren, da der Betrag der Steigung bei x_1 geringer ist. Außerdem sind die einzelnen Iterationswerte auch leichter auszurechnen. Wichtig ist, dass die Umformung zu $x_{n+1} = x + \sin x$ und nicht etwa nach $x_{n+1} = x - \sin x$ erfolgt. In diesem Fall wäre die Ableitung der Iterationsfunktion an der Nullstelle nämlich -2. Dadurch devergierte zuerst die Iterationsfolge und konvergierte danach für $x_1 < \pi$ gegen 0, für $x_1 > \pi$ gegen 2π, da in diesem Fall an den genannten Stellen die Ableitung der Iterationsfunktion gleich Null wäre.

Langsamer als das allgemeine Verfahren und das Newton-Verfahren sind das Sekantenverfahren und die Regula Falsi. Beide Verfahren konvergieren, die Regula Falsi etwas schneller, jedoch nicht wesentlich.

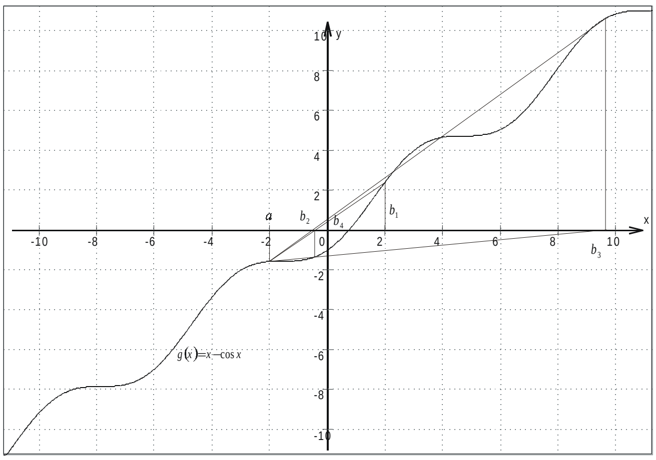
Um die Unterschiede der Konvergenz dieser beiden Verfahren zu untersuchen, soll die Nullstelle der Funktion $g(x) = x - \cos x$ mit Hilfe beider Verfahren gesucht werden: Die Startwerte seien $a_1 = -2$ und $b_1 = 2$. Der Schnittpunkt der Tangenten ist:

$$x_{sn} = \cos a_n \cdot \frac{b_n - a_n}{b_n - a_n + \cos a_n - \cos b_n}.$$

Durch die beiden Iterationsverfahren erhält man nachstehende Folgen:

Sekantenverfahren	Regula Falsi
-0,4161468365	-0,4161468365
7,913302087	0,4419940988
-0,3570018374	0,6920425999
6,976354201	0,7328966561
-0,1751688835	0,7382976935
4,816868093	0,7389853845
...	0,7390725048
9,376145035	0,7390835345
-0,4933171038	0,7390849308
9,376145035	0,7390851076
-0,4933171038	0,73908513
...	...

Die Folge des Sekantenverfahrens konvergiert offensichtlich nicht, jene der Regula Falsi hingegen schon. Den Grund verdeutlicht die folgende Zeichnung:



Die zu findende Nullstelle befindet sich nicht mehr im Intervall $[a_2; b_2]$. Dadurch, dass die Steigung der Sekante von $(a; g(a))$ und $(b_2; g(b_2))$ so gering ist, ist deren Nullstelle weit von der eigentlich zu findenden entfernt. Der Schnittpunkt der Sekante von $(a; g(a))$ und $(b_3; g(b_3))$ mit der x-Achse ist nun wiederum relativ nahe an der Nullstelle, wodurch jedoch der nächste Schnittpunkt wieder weit entfernt ist. Nach einigen Schritten wechseln sich jeweils Werte in der Nähe von 9,376145035 bzw. -0,4933171038 ab. Bei der Regula Falsi hingegen ist die Konvergenz dadurch gesichert, dass die Nullstelle sich immer innerhalb des zuletzt konstruierten Intervalls $[a_n; b_n]$ befindet. Wenn unbedingt das Sekantenverfahren verwendet werden soll, so kann meist erreicht werden, dass das Sekantenverfahren bei einer Funktion, bei der es vorher nicht konvergierte, dies dennoch tut, wenn das Anfangsintervall ausreichend verkleinert wird. Bei der vorgestellten Funktion kann man die Konvergenz etwa mit $a = -1$ und $b = 1$ erreichen, wobei dann allerdings immer noch eine sehr große Anzahl von Schritten gebraucht würde, um auf die selbe Genauigkeit wie die Regula Falsi zu kommen.

Für die Anwendungsmöglichkeiten der einzelnen Verfahren komme ich also zu folgendem Schluss: Ist die Ableitung einer Funktion bekannt, oder lässt diese sich leicht bestimmen, so sollte zur Bestimmung der Nullstellen einer Funktion das Newton-Verfahren angewandt werden, es sei denn, es ist eine Umformung des Allgemeinen Iterationsverfahrens bekannt, die ebenfalls ein Verfahren zweiten Grades ist. Wenn die Ableitung nicht bekannt ist, oder sich kein x_1 finden lässt, das so nahe an der Nullstelle liegt, dass die Folge bei den vorigen Methoden konvergiert, sollte die Regula Falsi verwendet werden. Auch dieses Verfahren ist noch relativ schnell. Das Sekantenverfahren sollte eigentlich nur angewandt werden, wenn der Prüfaufwand für die Regula Falsi zu hoch erscheinen sollte. Das Intervallhalbierungsverfahren lässt sich wegen der Langsamkeit der Konvergenz nur für die Berechnung der Nullstellen auf wenige Nachkommastellen einsetzen, es sei den, es wird eine Rechenmaschine benutzt.

7 Anhang

7.1 Benutzte Literatur

1. August Schmidt, Wilhelm Schweizer

   Analysis Zwei

   Ernst Klett Schulbuchverlag GmbH

   Stuttgart 1989

2. Schröder-Uchtmann

   „Einführung in die Mathematik, Analysis“

   Diesterweg Verlag 1973

3. Internet-Seite: http://www.uni-ulm.de/~s_rschw3/facharb/5.htm

4. Handbuch zu „Lernpaket Mathematik „Winfunktion““

   Jahreszahl nicht angegeben

5. Helmut Sieber, Leopold Huber

   Mathematische Formelsammlung für Gymnasien

   Ernst Klett Verlag GmbH

   Stuttgart 1992

6. Prof. Dr. Harald Scheid

   Schülerduden – Die Mathematik II

   Duden Verlag, Mannheim 1991

Alle Grafiken wurden mit den Programmen „Winfunktion Mathematik“ und „Corel Draw 8“ erstellt.

7.2 Programme

Der Doppelte Querstrich “//” bezeichnet Kommentare. Diese werden – wie auch die Bezeichnung der Programmes (`Filename:...`) – nicht in den Taschenrechner eingegeben.

```
Filename:INTERVAL
"A"?→A↵ // Die Intervallgrenzen des ersten Intervalls einlesen
"B"?→B↵
"G"?→G↵ // Die Anzahl der zu berechnenden Nachkommstellen einlesen
Do↵ // Eine Folge von Arbeitsschritten wiederholen
(A+B)÷2→F◢ // Mittelwert der Intervallgrenzen bestimmen
F→X↵ // Funktionswert des Mittelwertes bestimmen
Y1→C↵
A→X↵ // Funktionswert der linken Intervallgrenze bestimmen
Y1→D↵
B→X↵ // Funktionswert der rechten Intervallgrenze bestimmen
Y1→E↵
(C<0) And (D<0)⇨F→A↵ // Nachfolgendes Intervall bestimmen
(C>0) And (D>0)⇨F→A↵
(C>0) And (E>0)⇨F→B↵
(C<0) And (E<0)⇨F→B↵
LpWhile Int ((A−B)×10^G)≠0 // Abbrechen, wenn genügend Stellen sicher
```

```
Filename:SEKVERF
"A"?→A↵ // Die Intervallgrenzen des ersten Intervalls einlesen
"B"?→B↵
"G"?→F↵ // Die Anzahl der zu berechnenden Nachkommstellen einlesen
A→X↵ // Den Funktionswert der ersten Intervallgrenze berechen
Y1→C↵
Do↵ // Eine Folge von Arbeitsschritten wiederholen
B→X↵ // Berechnen der beweglichen Intervallgrenze
Y1→D↵
B→E↵ // Alte Intervallgrenze sichern
A−(C(B−A))÷(D−C)→B◢ // Neue Intervallgrenze berechnen
LpWhile Int ((B−E)×10^F)≠0 // Abbrechen, wenn genügend Stellen sicher
```

```
Filename:REGFALSI
"A"?→A↵ // Die Intervallgrenzen des ersten Intervalls einlesen
"B"?→B↵
"G"?→F↵ // Die Anzahl der zu berechnenden Nachkommastellen einlesen
Do↵ // Eine Folge von Arbeitsschritten wiederholen
```

```
X→G↵ // Letzten berechneten Näherungswert festhalten um feststellen zu können, wie viele Nachkommastellen (vermutlich) gesichert sind
A→X↵ // Den Funktionswert der linken Intervallgrenze berechnen
Y1→C↵
B→X↵ // Den Funktionswert der rechten Intervallgrenze berechnen
Y1→D↵
A-(C(B-A))÷(D-C)→X◢ // Schnittpunkt der Tangente feststellen
Y1→E↵
(E<0) And (C<0)⇨X→A↵ // Je nach Vorzeichen linke oder rechte
(E>0) And (C>0)⇨X→A↵ // Intervallgrenze ändern
(E<0) And (D<0)⇨X→B↵
(E>0) And (D>0)⇨X→B↵
LpWhile Int ((X-G)×10^F)≠0 // Abbrechen, wenn genügend Stellen sicher
```