

FACHARBEIT

- + Thema:
Lissajousfiguren: Grundlagen - Modell - Simulation
- + Fach:
Physik
- + Autor:
Andreas Ahlrichs
- + Veröffentlichung:
30. November 1999
- + Schule:
Herbartgymnasium, Oldenburg

Download der Facharbeit unter:

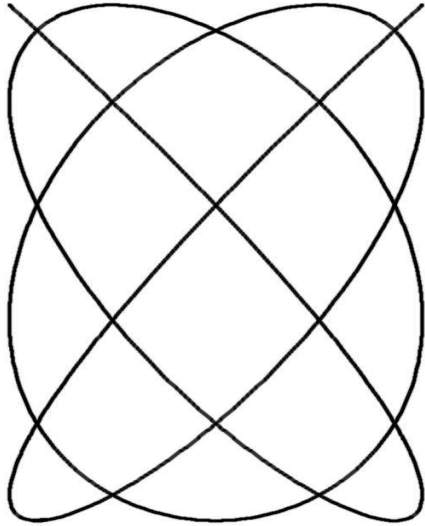
http://www.sisol.de/jobschool/arbeiten/index_download.sisol?detail=18



Andreas Ahlrichs

Lissajousfiguren

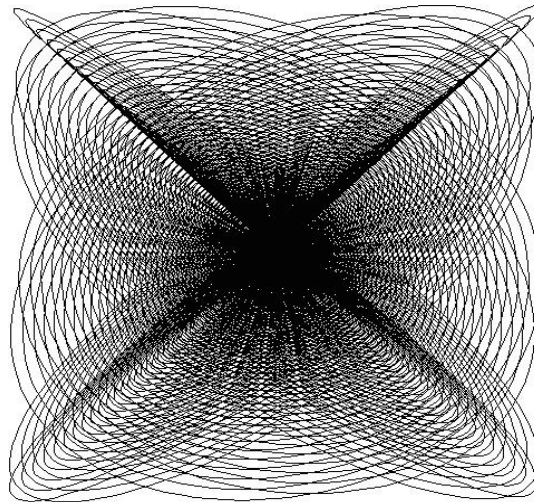
Grundlagen



Modell



Simulation



Facharbeit Physik 2001

Leistungsfach Physik

Kursthema: Felder, Schwingungen und Wellen

Facharbeit zum Thema:

Lissajousfiguren: Grundlagen – Modell – Simulation

Verfasser: Andreas Ahlrichs

Betreuende Lehrkraft: Herr Winzeler

Ausgabe des Themas: 31.01.2001

Abgabetermin: 14.03.2001

Die vorliegende Facharbeit wird mit _____ Punkten bewertet.

Datum

Unterschrift der Lehrkraft

Inhaltsverzeichnis

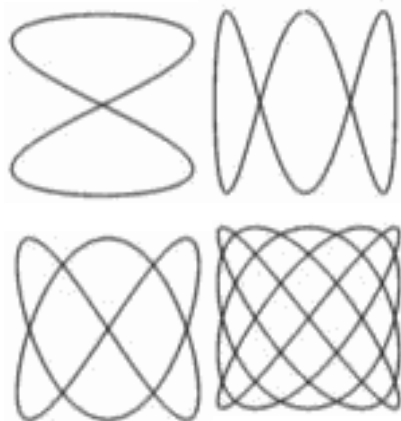
	Seite
1 Einleitung	1
2 Physikalische Grundlagen von Lissajousfiguren	2
2.1 Definition und Grundlagen von Schwingungen	2
2.2 Überlagerung von harmonischen Schwingungen	4
2.3 Überlagerung zweier zueinander senkrecht stehender Schwingungen	5
3 Erzeugung von Lissajousfiguren im Modell	8
3.1 Möglichkeiten zur Erzeugung von Lissajousfiguren	8
3.2 Das Lissajouspendel – Versuchsbeschreibung	9
3.2.1 Versuchsaufbau	9
3.2.2 Durchführung und Beobachtungen	9
3.2.3 Versuchsergebnisse	10
3.3 Dämpfung bei Lissajousfiguren	11
4 Simulation von Lissajousfiguren	12
4.1 Umsetzung der physikalischen Grundlagen bei der Simulation	12
4.2 Optische Phänomene bei der Simulation	13
5 Fazit	14
Anhang	
Anhang 1: Überlagerung von harmonischen Schwingungen	15
Anhang 2: Versuchsaufbau	16
Anhang 3: Pascal-Quelltext zur Simulation von Lissajousfiguren	17
Literaturverzeichnis	19

1 Einleitung

Lissajousfiguren sind ein interessantes physikalisches Phänomen. Obwohl sie auf einem relativ einfachen Prinzip beruhen, gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, sie zu betrachten. Vielen sind die Lissajousfiguren nur bekannt als die Figuren, die von dem

Abbildung 1:

Verschiedene Lissajousfiguren



Lissajouspendel (Kapitel 3) in den Sand gezeichnet werden, man kann sie aber auch mathematisch und physikalisch beschreiben (Kapitel 2). Mit den physikalischen Grundlagen kann man die Entstehung der Figuren erklären und die Figuren auf verschiedene Arten untersuchen. Dabei ist z.B. interessant, durch mathematische Verfahren zu ermitteln, unter welchen Bedingungen welche Lissajousfiguren entstehen. Überträgt man diese Erkenntnisse auf einen Versuch, kann man im Model ganz

bestimmte Figuren erzeugen und die physikalischen Grundlagen bestätigen sich. Schließlich kann man die Figuren auch mit Hilfe des Computers simulieren (Kapitel 4). Diese Simulation hat viele Vorteile bei der Betrachtung, wobei noch weitere Phänomene auftreten.

Die Lissajousfiguren wurden von drei Wissenschaftlern im 19. Jahrhundert unabhängig voneinander entdeckt. Als erster beschrieb der amerikanische Mathematiker Nathalie Bowditch¹ 1815 das Phänomen. Kurz darauf entdeckte der Engländer Thomas Young (vgl. Himstedt S.1) die Figuren. Der französische Physiker Jules-Antoine Lissajous konnte 1857 in seinen „Annales de Physique et de Chimie“ (vgl. Himstedt S.1) die Figuren als Erster physikalisch beschreiben und erklären. Deshalb wurden die Figuren auch nach ihm benannt.

Physikalisch gesehen entstehen Lissajousfiguren dann, wenn zwei senkrecht zueinander stehende Schwingungen sich ungestört überlagern. Im Folgenden wird zunächst beschrieben, was man unter einer Schwingung versteht und wie man sie physikalisch beschreiben kann. Danach wird die Überlagerung von Schwingungen genauer untersucht um die Überlagerung von zueinander senkrecht stehender Schwingungen beschreiben zu können.

Der zweite Abschnitt dieser Facharbeit beschäftigt sich mit der Erzeugung von Lissajousfiguren im Experiment und die dabei auftretenden Besonderheiten. Im letzten Teil wird schließlich erläutert, wie die man die physikalischen Grundlagen simulieren kann und welche besonderen Effekte dabei auftreten.

¹ s.: <http://www.alphaomega.se/english/cymatics.html#chladni>

2.1 Definition und Grundlagen von Schwingungen

„Führt ein Körper periodische Hin- und Herbewegungen um eine Ruhelage aus, so nennt man dies eine Schwingung“ (Grehn/Krause, S. 106). Allgemein kann eine Schwingung als „eine zeitlich periodische Änderung einer oder mehrerer Zustandsgrößen in einem physikalischen System, die auftritt, wenn bei Störung eines Gleichgewichtszustandes Rückstellkräfte wirksam werden, die den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen suchen“ (Meyers, S. 382), definiert werden. Dabei spielt bei der Beschreibung einer Schwingung die Periodizität eine wichtige Rolle. Sie bedeutet, dass die veränderten Zustandsgrößen nach gleichen Zeitintervallen gleiche (oder ähnliche) Werte annehmen. Mathematisch lässt sich die momentane Auslenkung (Elongation) $y(t)$ einer Schwingung zu jedem Zeitpunkt mit der Zeit-Elongations-Funktion $y(t) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschreiben. Diese Schwingung wird auch häufig als harmonische Schwingung oder Sinusschwingung bezeichnet (vgl. Fischer, S. 11). Dabei ist \hat{y} die Amplitude (Schwingungsdauer) der Schwingung (s. Abb. 2) und stellt den größten Betrag dar, den die Elongation annehmen kann und ω die Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz der Schwingung, die durch die Beziehung

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

beschrieben wird. Dabei ist f die Frequenz der Schwingung und T die Periodendauer (die Zeit für eine vollständige Schwingung). Es gilt: $T = 1/f$ bzw.

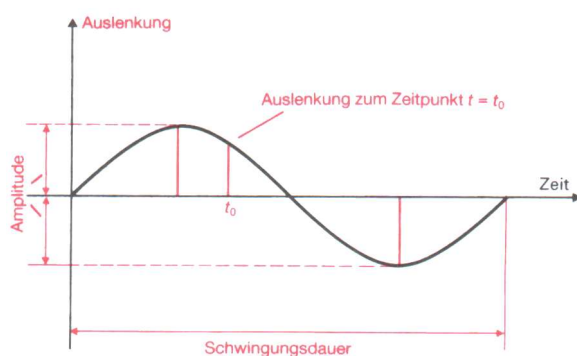
$$f = 1/T.$$

Die Phasenverschiebung φ gibt an, um welchen Betrag (in Grad- oder Bogenmaß) der Graph in x-Richtung verschoben ist. Eine Schwingung mit Phasenverschiebung erreicht in Bezug auf eine Schwingung ohne

Phasenverschiebung ihre maximale Auslenkung zu einem anderen Zeitpunkt. Man kann die Zeit-Elongations-Funktion (s.o.) mathematisch mit folgendem Ansatz herleiten:

„Die während des Schwingungsvorganges wirkende rücktreibende Kraft ist proportional der jeweiligen Auslenkung und ihr entgegen gerichtet“ (Grehn S. 106). Der Proportionalitätsfaktor D zeigt dieses Verhältnis von rücktreibender Kraft F und Elongation y an. Er ist für jedes schwingende System ebenso charakteristisch, wie die

Abbildung 2: Sinusschwingung



Frequenz (vgl. Grehn S.106). Es gilt also für jede harmonische Schwingung ein lineares Kraftgesetz der Form:

$$F = -D \cdot y$$

Diese Kraft F ruft eine Beschleunigung a hervor und ist deshalb mit der Gleichung

$$F = m \cdot a$$

verknüpft. Zusammen ergibt sich daraus:

$$m \cdot a = -D \cdot y.$$

Da $a = \frac{dv}{dt}$ und $v = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, ist $a = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$. Eingesetzt ergibt sich daraus:

$$m \cdot \ddot{y}(t) = -D \cdot y(t) \quad \text{oder} \quad \ddot{y}(t) + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$$

Mit dieser Differentialgleichung kann man die Elongation $y(t)$ iterativ berechnen. Um sie zu lösen, braucht man eine Funktion $y(t)$ deren zweite Ableitung $\ddot{y}(t)$ zu der Ausgangsfunktion proportional ist (vgl. Grehn/Krause S.110). Dafür bietet sich eine Sinusfunktion an, da $f(x) = \sin x$ und $f''(x) = -\sin x$ ist. Da eine Sinusfunktion hergeleitet werden soll, liegt es nahe, sie auch zur Lösung dieser Differentialgleichung zu verwenden:

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\dot{y}(t) = \hat{y} \cdot \omega \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = -\hat{y} \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Setzt man $y(t)$ und $\ddot{y}(t)$ in die Differentialgleichung ein, erhält man:

$$-\hat{y} \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{D}{m} \cdot \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{D}{m} \cdot \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \hat{y} \cdot \omega^2 \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = \frac{D}{m}$$

Die Differentialgleichung $\ddot{y}(t) + \frac{D}{m} \cdot y(t) = 0$ besitzt die Lösungsfunktion

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi).$$

Mit dieser Lösungsfunktion kann man sämtliche Werte von $y(t)$ berechnen. Sie beschreibt alle Eigenschaften einer Schwingung.

2.2 Überlagerung von harmonischen Schwingungen:

Wenn ein Körper zwei Schwingungen gleichzeitig ausführt, so spricht man von einer Überlagerung der Schwingungen. Dabei bleiben die beiden Einzelschwingungen jedoch bestehen, beeinflussen sich nicht gegenseitig und „schwingen so, als sei die andere nicht vorhanden“ (Meyers S. 413) – sie überlagern sich ungestört (vgl. Grehn S.114). „Das Prinzip der ungestörten Überlagerung von Bewegungen [„das schon von Newton erkannt wurde (vgl. Meyers S. 413),] gehört zu den grundlegenden Aussagen der Physik, die allein aus der Erfahrung gewonnen wurden. Sie können nicht von anderen Gesetzen abgeleitet werden.“² Bei der Überlagerung von harmonischen Schwingungen lassen sich grundsätzlich zwei verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem, ob die Einzelschwingungen in die gleiche Richtung schwingen oder – wie bei den Lissajousfiguren – senkrecht aufeinander stehen (vgl. Grimsehl S. 304). In dem Fall, in dem die Teilschwingungen in der gleichen Ebene schwingen, lässt sich die Zeit-Elongations-Funktion $y_r(t)$ der resultierenden Schwingung durch Addition der Einzelschwingungen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ berechnen:

$$y_r(t) = y_1(t) + y_2(t) = \hat{y}_1 \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + \hat{y}_2 \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Bei gleicher Frequenz ergibt sich daraus eine harmonische Schwingung mit der selben Frequenz, deren Amplitude in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung und den Einzelamplituden entweder verstärkt oder abgeschwächt wird. Wenn die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = \pi$ beträgt und die Amplituden gleich groß sind, löschen sich die Schwingungen gegenseitig aus, weil immer eine maximale positive Auslenkung auf eine maximale negative Auslenkung trifft.

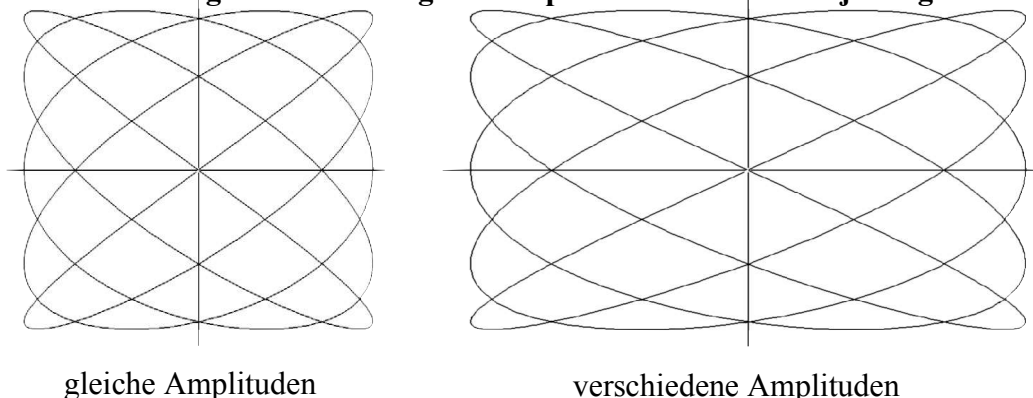
„Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenz führt nicht mehr zu harmonischen Schwingungen“ (Grehn S.117). In diesem Fall tritt das Phänomen der „Schwebung“ auf (bei gleicher Amplitude). Die Amplitude der resultierenden Schwingung nimmt periodisch ab und zu. Besonders deutlich wird diese Schwebung bei Schwingungen, deren Frequenzen nur einen geringen Unterschied haben (z.B. ein Frequenzverhältnis von $f_1/f_2 = 10/9$). Der Abstand zwischen zwei maximalen Auslenkungen der Einzelschwingungen ändert sich ständig. Dadurch treffen zu einem Zeitpunkt zwei maximale Auslenkungen aufeinander und die resultierende Schwebung hat zu diesem Zeitpunkt ihre maximale Amplitude und zu einem anderen Zeitpunkt trifft eine maximale positive Auslenkung auf eine maximale negative Auslenkung und die Schwebung hat zu diesem Zeitpunkt keine Auslenkung (vgl. Anhang 1).

² Quelle: http://www.tu-chemnitz.de/~chwei/physik/1_1_5.htm

2.3 Überlagerung zweier zueinander senkrecht stehender Schwingungen

In dem Fall, in dem die beiden sich überlagernden Schwingungen nicht in der selben Ebene schwingen, sondern senkrecht zueinander stehen, entstehen Lissajousfiguren. Das Aussehen dieser Figuren hängt von dem Frequenzverhältnis, den Amplituden und der Phasenverschiebung der beiden Schwingungen ab. Zur Darstellung der Figuren benutzt man die sogenannte Parameterdarstellung. Dabei wird immer einem Funktionswert der Gleichung $x(t) = \hat{y}_x \sin(\omega_x \cdot t + \Delta\varphi)$ der Funktionswert von $y(t) = \hat{y}_y \sin(\omega_y \cdot t)$ zum gleichen Zeitpunkt t zugewiesen (vgl. Gellert S. 128). Da die beiden Funktionen periodisch sind, muss man den betrachteten Zeitraum eingrenzen, weil sonst einem Wert von $x(t)$ unendlich viele Werte von $y(t)$ zugewiesen werden. Es handelt sich um Sinusfunktionen, deshalb ist es sinnvoll, einen betrachteten Zeitraum von $0 \leq t \leq 2\pi$ zu wählen, weil die beiden Schwingungen in diesem Zeitraum n_x bzw. n_y (mit $f_x = n_x/t$ und $f_y = n_y/t$) Perioden durchlaufen und sich die Figur nach diesem Zeitraum wiederholen würde. Fasst man nun die Werte von $x(t)$ und $y(t)$ eines Zeitpunktes als Abszisse und Ordinate eines Punktes in einem Koordinatensystem auf, so beschreibt der Punkt mit der Zeit eine Bahnkurve in Form einer Lissajousfigur (vgl. Fischer S. 25). Mit den Frequenzen und der Phasenverschiebung der Schwingungen kann man nun bestimmte Aussagen über die entstehende Figur machen. Haben z.B. beide Schwingungen die gleiche Frequenz, so bildet die Bahnkurve stets Ellipsen und in den Extremfällen Geraden (z.B. bei $\Delta\varphi = 0$) oder Kreise (z.B. bei $\Delta\varphi = \pi/2$). Weil die Koordinaten der Bahnkurve immer zwischen den Grenzen $\pm \hat{y}_x$ und $\pm \hat{y}_y$ liegen, folgt daraus, dass sich die Kurve ganz in einem Rechteck (oder bei $\hat{y}_x = \hat{y}_y$ in einem Quadrat) erstrecken muss, dessen Mittelpunkt auf dem Koordinatenursprung liegt. (vgl. Himstedt S.6). Deshalb haben die Amplituden der Schwingungen außer dem Strecken oder Zusammenstauchen keinen Einfluss auf das Aussehen der Figuren:

Abbildung 3: Auswirkung der Amplituden auf die Lissajousfiguren



Im Folgenden wird deshalb davon ausgegangen, dass die Amplituden gleich groß sind. Bei der Betrachtung von Lissajousfiguren mit unterschiedlichen Frequenzverhältnissen kann man zur Vereinfachung (wie in Himstedt auf S. 2 beschrieben) noch weitere Vorgaben für die beiden Frequenzen machen: Wenn man zunächst von einem irrationalen Frequenzverhältnis absieht, kann man die beiden Frequenzen grundsätzlich mit dem Verhältnis $f_x/f_y = m/n$ angeben, wobei m und n immer positive ganze Zahlen sind. (Wenn sie negativ wären, bräuchte man nur die positiven und negativen Abschnitte der Achsen im Koordinatensystem vertauschen, um die selbe Figur zu erhalten und wenn m und n Brüche wären, könnte man sie durch Erweitern wieder zu ganzen Zahlen machen.) Weiter kann man davon ausgehen, dass m und n keinen gemeinsamen Faktor haben, den man kürzen könnte und dass deshalb mindestens eine der beiden Zahlen eine Primzahl ist.

Die für die beiden Frequenzen gegebenen Voraussetzung gelten für die Winkelgeschwindigkeiten der Schwingungen genauso. Es gilt: $\omega = 2\pi f$, deshalb ist $f_x/f_y = \omega_x/\omega_y = m/n$. Es ist übersichtlicher mit den Winkelgeschwindigkeiten zu rechnen, weil der Faktor 2π wegfällt. Deshalb gilt für die beiden Schwingungen (mit

$$x(t) = \hat{y} \sin(m \cdot t + \Delta\varphi) \quad \Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x):$$

und

$$y(t) = \hat{y} \sin(n \cdot t)$$

Für die folgenden Untersuchungen (die in Himstedt auf Seite 6-8 beschrieben werden) wird vorausgesetzt, dass $\Delta\varphi = 0$ ist.

Wie beschrieben erstrecken sich die Figuren immer innerhalb eines Quadrates. Ist $\sin m \cdot t = \pm 1$, berührt die Figur eine der zur y-Achse parallelen Seiten des Quadrates, weil die Auslenkung ihren maximalen positiven oder negativen Wert erreicht. Das gleiche gilt für $\sin n \cdot t = \pm 1$ in Bezug auf eine der zur x-Achse parallelen Seiten des Quadrates. Eine Sinusfunktion erreicht den Wert ± 1 bei $1/2\pi, 3/2\pi, 5/2\pi$ usw., oder allgemein bei $(2k+1) \cdot \pi/2$, wobei k eine beliebige ganze Zahl ist. Untersucht man zunächst nur eine Schwingung, so berührt die Figur eine der zur y-Achse parallelen

Seiten, wenn $m \cdot t = (2p+1) \frac{\pi}{2}$ (mit p als beliebiger ganzer Zahl). Für die Zeitpunkte zu

denen dieses zutrifft, gilt folgende Bedingung: $t = \frac{2p+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2}$. Weil der Zeitraum nur

von $t = 0$ bis $t = 2\pi$ betrachtet wird, muss $\frac{2p+1}{m} \leq 4$ sein, damit t nicht größer wird als

2π . Ist p größer als $2 \cdot m$, ist $\frac{2p+1}{m}$ immer größer als vier, deshalb kann p $2 \cdot m$ verschiedene Werte annehmen, weil p eine beliebige ganze Zahl ist. Die Figur berührt also insgesamt $2 \cdot m$ mal eine der zur y -Achse parallelen Seiten. Analog dazu berührt sie auch $2 \cdot n$ mal eine der zur x -Achse parallelen Seiten des Quadrates. Wenn eine Lissajousfigur genau durch eine Ecke des Quadrates geht, muss man dabei diesen Eckpunkt sowohl als Berührungspunkt für die horizontale Seite zählen, als auch für die vertikale.

Der Fall, in dem die Lissajousfigur durch eine Ecke geht, weist noch weitere Besonderheiten auf: Die Lissajousfigur ist nicht geschlossen und wird in der Zeit $t = 0$ bis $t = 2\pi$ zweimal ganz durchlaufen. Wenn sie durch einen Eckpunkt läuft, muss

sowohl $\sin m \cdot t = \pm 1$ als auch $\sin n \cdot t = \pm 1$ sein. In diesem Falle gilt: $m \cdot t = (2p+1) \frac{\pi}{2}$

und $n \cdot t = (2q+1) \frac{\pi}{2}$ (mit p und q als beliebige ganze Zahlen). Löst man die

Gleichungen nach t auf und setzt sie gleich, erhält man: $m(2p+1) = n(2q+1)$. Weil $(2p+1)$ und $(2q+1)$ immer ungerade Werte ergeben (und eine ungerade Zahl mit einer geraden multipliziert immer eine ungerade Zahl ergibt), kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn sowohl m als auch n ungerade sind. (Der Fall, in dem m und n positiv sind wurde ausgeschlossen.).

Allgemein kann man zusammenfassen: Lissajousfiguren mit $\Delta\varphi = 0$ und einem rationalem Frequenzverhältnis von $f_x/f_y = \omega_x/\omega_y = m/n$ haben immer $2 \cdot m$ Extrema auf den zur x -Achse parallelen Seiten und $2 \cdot n$ Extrema auf den zur y -Achse parallelen Seiten. Sind die Figuren nicht geschlossen, sind m und n ungerade Zahlen und die Punkte, die genau in den Ecken liegen, werden als Extrema beider Seiten zugleich gezählt.

Betrachtet man Lissajousfiguren mit $\Delta\varphi \neq 0$, fällt auf, dass bei den meisten Werten für die Phasenverschiebung die selben Bedingungen für die Anzahl der Extrema gelten. Es kommt jedoch auch vor, dass bei ganz bestimmten Phasenverschiebungen die Figuren nicht mehr geschlossen sind. Je größer die Zahlen m und n sind desto häufiger tritt dieses auf.

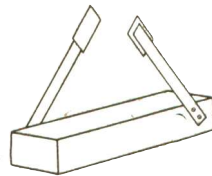
Stehen die Frequenzen nicht in einem rationalen Verhältnis zueinander (z.B. $f_x/f_y = 1/\sqrt{2}$), wiederholt sich die Figur nicht nach einer bestimmten Zeit, weil die Periodendauern kein gemeinsames Vielfaches haben.

3 Erzeugung von Lissajousfiguren im Modell

3.1 Möglichkeiten zur Erzeugung von Lissajousfiguren

Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten, Lissajousfiguren zu erzeugen. Die am häufigsten benutzte Methode ist die Darstellung mit einem Oszilloskop. Dabei werden die beiden Schwingungen als Wechselspannungen an die x- und y-Ablenkplatten angelegt und durch Überlagerung werden die Lissajousfiguren auf dem Leuchtschirm sichtbar. Eine weitere Möglichkeit ist es, die Figuren auf optische Weise zu erzeugen, indem man einen Lichtstrahl auf zwei senkrecht zueinander schwingende Spiegel lenkt

Abbildung 4: „Zusammensetzung von Schwingungen auf optischem Wege“



Quelle: Grimsehl S. 308.

(vgl. Abb. 4). Lissajousfiguren lassen sich auch mechanisch erzeugen. Dazu werden wie in Abbildung 5 zwei Stäbe, die senkrecht zueinander stehen, auf drehenden Scheiben befestigt. Betrachtet man die Apparatur von vorne so beschreibt der Schnittpunkt der beiden Stäbe eine Lissajousfigur (siehe Abb. 6). Drehen sich die beiden Scheiben sehr schnell so wirken die Lissajousfiguren wie eine weiße Bahn auf grauem Untergrund. Dies lässt sich folgendermaßen deuten: „Während eines halben Umlaufes wird jeder Punkt der Bildebene zweimal abgeschattet, die vom Schnittpunkt der Stäbe überstrichene Bahn jedoch nur einmal“ (Pohl S. 36).

Häufig wird auch das sog. „Lissajouspendel“ zur Erzeugung von Lissajousfiguren verwendet. Es basiert auf einem Pendel, dass in zwei Ebenen zugleich schwingen kann, ohne dass sich diese beiden Einzelschwingungen gegenseitig stören. Sehr anschaulich kann dieses Pendel mit dem folgenden Versuchsaufbau dargestellt werden.

Abbildung 5: mechanische Erzeugung von Lissajousfiguren

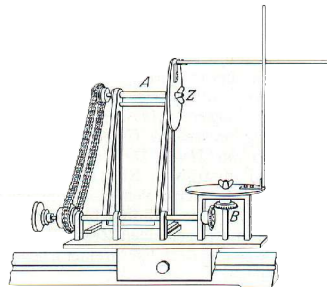
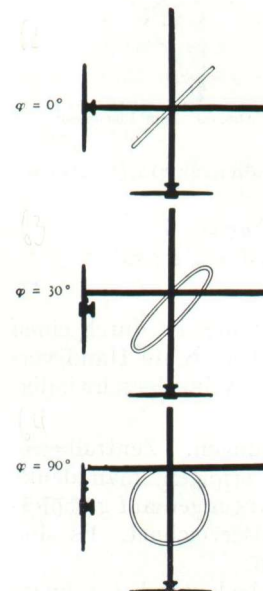


Abbildung 6: mechanisch erzeugte Lissajousfiguren

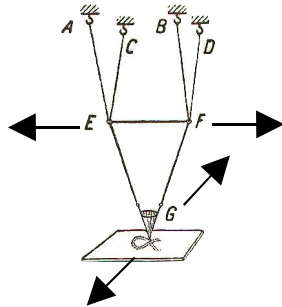


3.2 Das Lissajouspendel – Versuchsbeschreibung

3.2.1 Versuchsaufbau

Der in Grimsehl auf Seite 308 beschriebene Versuch ist wie folgt aufgebaut (s. Abb. 7 / Anhang 2): Vier Haken (A,B,C,D) werden an den Ecken eines Quadrates mit einem

Abbildung 7: Das Lissajouspendel



Meter Seitenlänge in die Zimmerdecke geschraubt. Ein Stab (EF), der an beiden Enden eine Bohrung hat, wird aufgehängt, indem man an die Haken A und B je eine vier Meter lange Schnur befestigt und diese durch die Bohrung führt. Die anderen Enden der Schnüre werden mit Klemmen (vgl. Anhang 2) an den Haken C bzw. D so befestigt, dass der Stab parallel zum Boden hängt und frei schwingen kann. Eine weitere drei Meter lange Schnur

Quelle: Grimsehl S.308 wird nun an einem Ende (E) des Stabes fixiert und am anderen Ende (F) wieder mit einer Klemme (vgl. Anhang 2) festgeklemmt. An diese Schnur wird ein spitz zulaufendes Gewicht (G) so geknotet, dass man es frei an der Schnur entlang ziehen kann (vgl. Anhang 2), bis es genau in der Mitte zwischen E und F hängt. Unter dieses Gewicht wird ein Gefäß mit feinem Sand gestellt. Mit den Klemmen wird die Höhe des Gewichts so eingestellt, dass die Spitze in der Ruhelage etwa zwei Millimeter in den Sand eintaucht.

3.2.2 Durchführung und Beobachtungen:

Wenn man das Pendel unterhalb des Stabes auslenkt, schwingt es nur in einer Ebene, die senkrecht zu EF steht. Der obere Teil bleibt dabei unbewegt und das Pendel zeichnet eine gerade Linie in den Sand. Wird das Pendel jedoch unten nicht ausgelenkt, dafür aber der Stab, so ergibt sich wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu der ersten liegt, da das Pendel nur in der Ebene EFG schwingt. Wenn man sowohl das Pendel unten als auch den Stab auslenkt, zeichnet das Pendel selbständig Lissajousfiguren in den Sand (vgl. Abb. 8). Dabei werden die Figuren immer kleiner, bleiben aber in ihrem Aussehen immer gleich. Verändert man mit den Klemmen die Länge der schwingenden Schnüre so, dass der Stab nach oben oder unten verschoben wird, das Gewicht aber immer noch gleichweit in den Sand eintaucht, verändert sich auch das Aussehen der Figuren. Das Aussehen lässt sich auch verändern, indem man die beiden Schwingungen so auslenkt, dass sie zu unterschiedlichen Zeitpunkten ihre maximale

Abb. 8: Lissajousfigur

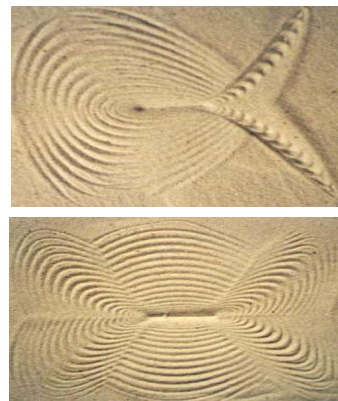


Auslenkung erreichen. Bei ganz bestimmten Einstellungen wirken die erzeugten Figuren regelmäßiger und geometrischer als bei anderen, bei denen sich die Figuren sehr oft mit sich selber überschneiden. Das Pendel beschreibt beim Schwingen eine Kreisbahn. Ist die Auslenkung sehr groß, verlässt die Spitze deshalb den Sand. (Idealerweise sollte man deshalb eine Wölbung in den Sand einarbeiten, die genau dem Radius der Kreisbahn entspricht, so dass die Spitze immer gleich weit in den Sand eingetaucht ist.) Dies kann man aber ausgleichen, indem man das Pendel nur soweit auslenkt, dass die Spitze zu jedem Zeitpunkt den Sand berührt.

3.2.3 Versuchsergebnisse:

Bei diesem Versuch entstehen die Lissajousfiguren, weil das Pendel in zwei Ebenen zugleich schwingen kann. Wie beobachtet können beide Schwingungen auch unabhängig von einander schwingen. In diesem Fall zeichnet die Spitze eine gerade Linie, parallel zur Schwingebene. Die Lissajousfiguren entstehen durch die ungestörte Überlagerung der Einzelschwingungen des Pendels (vgl. Kapitel 2.2). Bei einem Federpendel gilt das Verhältnis: $\omega^2 = \sqrt{g/l}$ (mit g als Erdbeschleunigung und l als Pendellänge). Damit ist die Schwingdauer T proportional (und die Frequenz umgekehrt proportional) zur Wurzel aus der Pendellänge l und unabhängig von der Masse (vgl. Grehn S.111). Wenn man den Stab nach oben oder unten verschiebt, verändert sich deshalb auch das Frequenzverhältnis der beiden Schwingungen und es entsteht eine andere Lissajousfigur. Dabei nimmt die Pendellänge der einen Schwingung immer um genau den Betrag ab, um den die andere zunimmt. Deshalb ist die Summe der beiden Periodendauern immer gleich groß. Will man eine Lissajousfigur mit einem ganz bestimmten Frequenzverhältnis erzeugen, muss man zunächst die beiden Periodendauern messen (- um genauere Werte zu erzielen misst man die Zeit für mehrere Schwingungen -), um die Summe der Periodendauern zu bestimmen. Diese Summe teilt man nun in das gewünschte Verhältnis ein und ändert die Periodendauern der Schwingungen durch Verschieben des Stabes so, dass sie mit den berechneten Werten übereinstimmen. Das Aussehen der entstehenden Figuren hängt nun nur noch von der Phasenverschiebung ab (vgl. Abb.9).

Abbildung 9:
Lissajousfiguren mit
 $m/n = 2/3$



3.3 Dämpfung bei Lissajousfiguren

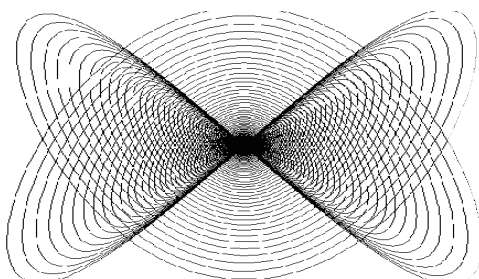
Bei der Versuchsdurchführung ist aufgefallen, dass die Figuren mit der Zeit immer kleiner geworden sind. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass die Schwingungen durch die Reibung im Sand und an den Halterungspunkten der Schnüre, sowie durch den Luftwiderstand gedämpft werden. Betrachtet man die Figuren genauer, so sieht man, dass sich das generelle Aussehen der Figur nicht ändert. Daraus lässt sich schließen, dass durch die Dämpfung nur die Amplitude der Schwingung beeinflusst wird, die Phasenverschiebung und die Frequenzen aber gleich bleiben. Es fällt auf, dass die von der Spitze in den Sand gezeichneten Spuren zu Beginn (, bei der Figur außen,) noch relativ weit voneinander entfernt sind. Mit der Zeit wird der Abstand zwischen zwei aufeinander folgender Spuren immer kleiner (s. Abb. 10), bis die einzelnen Spuren im Zentrum der Figur nicht mehr erkennbar sind. Die Abnahme der Amplituden wird mit der Zeit immer kleiner, deshalb lässt sich eine exponentielle Abnahme vermuten, die auch bei anderen gedämpften Schwingungen auftritt. Eine gedämpfte Schwingung wird durch die Gleichung $y(t) = \hat{y} \cdot e^{-k \cdot t} \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben (Grehn S.111). Sie lässt sich ähnlich wie die Gleichung in Kapitel 2.1 herleiten. Dabei heißt der Faktor k Dämpfungskonstante. Er gibt an, wie schnell die Amplitude der Schwingung abnimmt. Die Gleichung kann aber nur als Näherung für die gedämpften Schwingungen im Versuch sein, weil die Dämpfung beim Lissajouspendel nicht die ganze Zeit gleich groß ist. Dadurch, dass das Pendel eine Kreisbahn beschreibt, hebt sich die Spitze, je weiter sie sich von der Ruhelage entfernt, immer weiter aus dem Sand. Je tiefer die Spitze jedoch in den Sand eingetaucht ist, um so größer ist auch die Dämpfung, weil die Reibung größer ist. Vergleicht man eine Lissajousfigur, die vom Lissajouspendel erzeugt wurde mit einer, die mit der Gleichung für gedämpfte Schwingungen (mit dem Computer) berechnet wurde, bestätigt sich die Vermutung, dass die Gleichung als Näherung für die Dämpfung im Versuch gewählt werden kann:

Abb. 10 Dämpfung bei Lissajousfiguren:



Der Abstand zweier aufeinander folgender Spuren wird immer kleiner.

Abb. 11: Vergleich von Computersimulation mit Versuchsergebnis



4 Simulation von Lissajousfiguren

Lissajousfiguren lassen sich auch am Computer simulieren. Diese Simulation bietet viele Vorteile bei der Darstellung der Figuren. Zum einen kann der Computer die Figuren mathematisch sehr exakt darstellen, weil die Figuren berechnet werden und deshalb durch keine äußeren Umstände (wie z.B. Reibung) beeinflusst werden, zum anderen kann er die Figuren aufgrund seiner hohen Rechenleistung auch sehr schnell erzeugen, was vor allem bei der Darstellung von Lissajousfiguren mit gedämpften Schwingungen vorteilhaft ist. Ein weitere Vorteil an dieser Simulation ist, dass die einzelnen physikalischen Eigenschaften (Amplitude, Frequenz usw.) der beiden Schwingungen sehr einfach, ohne großen Aufwand und sehr genau verändert werden können.

4.1 Umsetzung der physikalischen Grundlagen bei der Simulation

Die Simulation von Lissajousfiguren basiert auf einem ähnlichen Prinzip, wie die Parameterdarstellung (vgl. Kapitel 2.3). Man betrachtet dabei wieder einen Zeitraum von 0 bis 2π . Dieser Zeitraum wird in viele kurz aufeinander folgende Zeitpunkte eingeteilt, zu denen je der entsprechende x- und y-Wert berechnet wird. Dabei durchläuft das Programm ein Zählschleife, in der es alle Werte berechnet und die Punkte mit den Koordinaten (x/y) in eine Koordinatensystem zeichnet und jeden Punkt mit dem nächsten verbindet. Die Werte, die die Zählvariable i annimmt, kann man als den Zeitpunkt auffassen, zu dem die Schwingungsgleichung berechnet wird. Bei der Berechnung verwendet das Programm die gleichen Gleichungen die auch zur Darstellung jeder Schwingung verwendet werden.

Wenn der Zeitraum von 0 bis 2π in n Zeitpunkte aufgeteilt wird, zählt die Zählschleife alle Werte für i von 0 bis n durch. Deshalb muss man jeden Wert i durch n teilen, weil man sonst nicht den Zeitraum von 0 bis 2π berechnet sondern von 0 bis n.

Aus $y(t) = \hat{y} \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)$ wird (im Falle eines Pascal-Quelltextes):

`y := (ymax * sin (2 * pi * fl * i/n + Phase)).`

Je größer man n wählt, desto genauer wird die Figur berechnet. Dies kann man sich dann besonders deutlich machen, wenn das Frequenzverhältnis relativ große Werte annimmt, z.B. $f_1/f_2 = 20/23$. Dabei durchläuft die Figur eine relativ lange Strecke, bis sie wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt. Wird die Zeit in nur relativ wenig Zeitpunkte eingeteilt, werden auch nur entsprechend wenige Punkte dieser Strecke berechnet und die Figur wird kantig.

Will man auch die Dämpfung der Schwingungen simulieren, berechnet man den Dämpfungsfaktor $e^{-k \cdot t}$ in der Zählschleife für jedes i . Dieser Faktor q wird dann in die Berechnung der Koordinaten mit einbezogen:

$$y := (y_{\max} * q * (2 * \pi * f_1 * i/n + \text{Phase}))$$

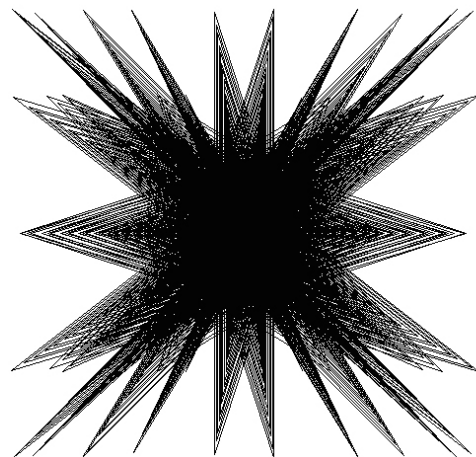
Da man, um die Dämpfung sichtbar zu machen, die gesamte Lissajousfigur mehrfach zeichnen muss, wiederholt man die gesamte Zählschleife so oft, bis der Faktor q einen so kleinen Wert angenommen hat, dass die Amplituden der Schwingungen nahezu null betragen. Übertragen auf den Versuch würde das bedeuten, dass das Pendel stehen bleibt.

4.2 Optische Phänomene bei der Simulation

Wenn man in kurzer Abfolge hintereinander Lissajousfiguren, deren Phasenverschiebung der Schwingungen sich jeweils nur geringfügig von denen der zuvor gezeichneten unterscheidet, vom Computer simulieren lässt, ergibt sich ein überraschendes Phänomen: Die einzelnen Figuren scheinen ineinander überzugehen. Werden die Figuren sehr schnell hintereinander gezeigt, scheint es, als handele es sich um ein dreidimensionales Objekt, das sich um eine Achse dreht. Dieses Phänomen tritt sogar dann auf, wenn die Schwingungen gedämpft sind. Es handelt sich aber nur um eine optische Täuschung, die jedoch häufig in der Unterhaltungsbranche, z.B. für Lasershows genutzt wird.

Ein weiteres optisches Phänomen tritt dann auf, wenn man die Zeit in extrem wenige Zeitpunkte einteilt zu denen die Figur berechnet wird, so dass die Figuren besonders kantig werden. Sie verlieren dabei völlig das Aussehen einer Lissajousfigur, basieren aber immer noch auf der gleichen Grundlage (vgl. Abbildung 12).

Abbildung 12: Kantige Lissajousfigur



5 Fazit

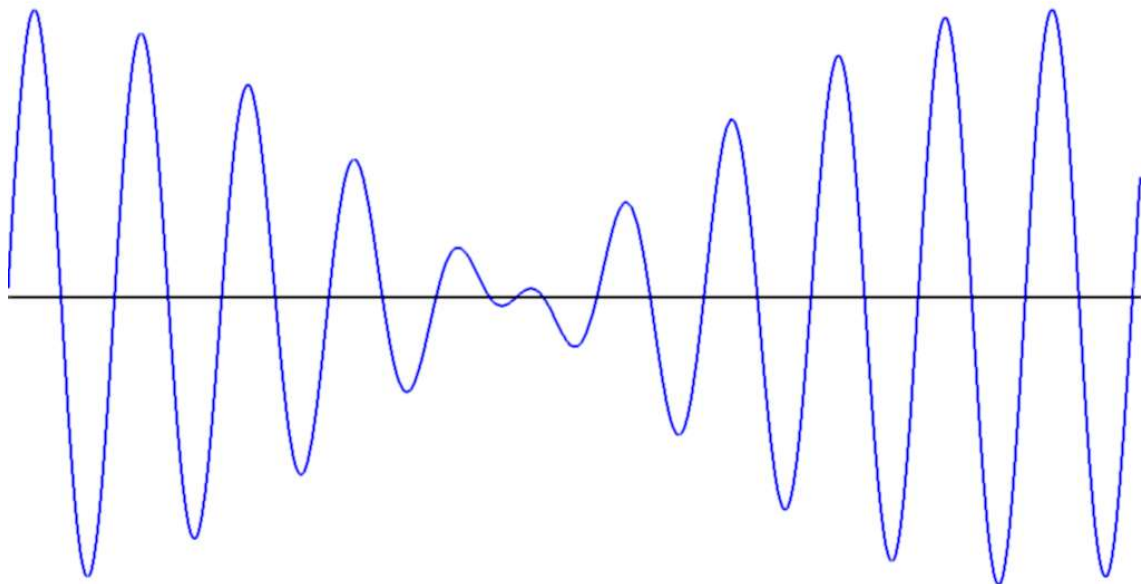
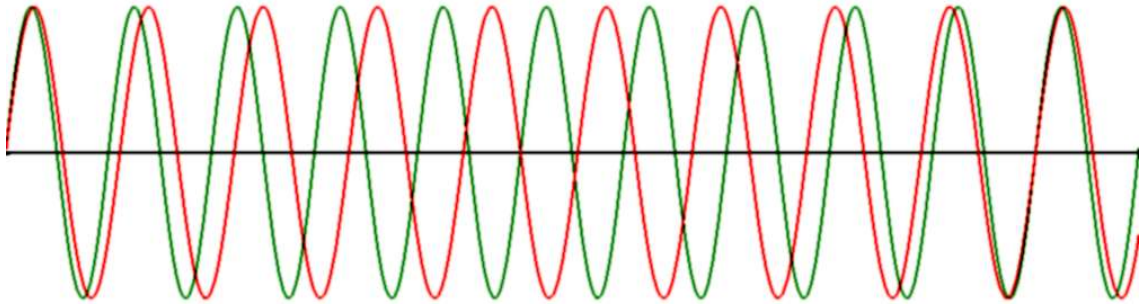
Lissajousfiguren haben eigentlich keine große Bedeutung für die Physik. Sie können weder als Grundlage für weitere Forschungen dienen, noch gibt es viele Anwendungsmöglichkeiten. Eine dieser wenigen Möglichkeiten ist die Messtechnik: Wenn man eine bekannte Schwingung mit einer unbekanntem vergleichen will, kann man (z.B. bei Wechselstrom) diese Schwingungen mit einem Oszilloskop als Lissajousfiguren darstellen (vgl. Kapitel 3.1). Durch Betrachtung der entstehenden Figuren kann man, z.B. mit den in Kapitel 2.3 beschriebenen Bedingungen bestimmte Aussagen über die Frequenz und die Phasenverschiebung der unbekanntem Schwingung machen. Diese Untersuchung ist aber immer nur dann sinnvoll, wenn die beiden Schwingungen in einem einfachen rationalen Verhältnis zueinander stehen. Durch moderne (Computer unterstützte) Messverfahren kann man sehr viel genauere Untersuchung von verschiedenen Schwingungen durchführen, deshalb ist dieses Anwendungsbeispiel nicht mehr aktuell, dafür aber auch anschaulicher als die meisten anderen Untersuchungen.

Ein anderes ganz anderes Anwendungsfeld außerhalb ihrer physikalischen Grundlagen entsteht durch die besondere Ästhetik der Lissajousfiguren. Professionell gefertigte Lissajouspendel können z.B. teuer verkauft werden (oft für mehrere hundert Mark). Das Pendel fasziniert durch eine unglaubliche Präzision, mit der es die Figuren in den Sand zeichnet. Die dabei entstehenden Figuren wirken aufgrund ihrer vielen verschiedenen Formen und durch die vielen Bögen sehr harmonisch und ästhetisch.

Anhang 1: Überlagerung von harmonischen Schwingungen

Überlagerung zweier Schwingungen mit dem Frequenzverhältnis $f_1/f_2 = 10/9$:

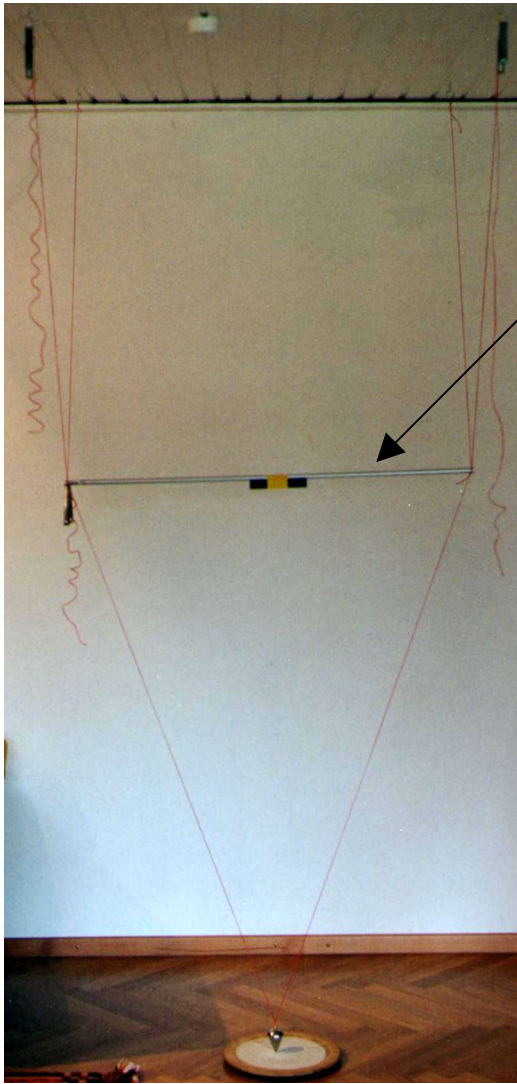
Aus den zwei Einzelschwingungen ergibt sich eine Schwebung:



An der Stelle, wo eine maximale positive Auslenkung auf eine maximale negative Auslenkung trifft (Mitte), hat die Schwebung keine Auslenkung. Dort wo zwei maximale Auslenkungen aufeinander treffen hat die Schwebung ihre maximale Auslenkung (Anfang und Ende).

Anhang 2: Versuchsaufbau

Anhang 1: Das Lissajouspendel



Anmerkung: Dieses Gewicht wird an dem Stab befestigt, damit er ungefähr die gleiche Masse hat, wie das spitze Gewicht. Ist der Stab leichter als das Gewicht unten, so wird seine Schwingung stärker gedämpft und die entstehenden Figuren sind nicht so einheitlich wie bei annähernd gleicher Masse und werden verzerrt.

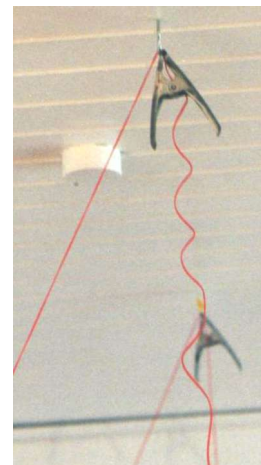
Anhang 3: Aufhängung Mitte



Anhang 4: Aufhängung des Gewichtes



Anhang 2 : Aufhängung oben



Anhang 3: Pascal-Quelltext zur Simulation von Lissajousfiguren

```

{$N+ ,G+}
program Lissajous_Figuren;
uses crt,graph;

var ymax : integer;
    xmax : integer;
    gd, gm : integer;
    di     : real;
    f1, f2 : real;
    K: real ;
    ende   : boolean;
    c      : char;
    demo   : boolean;

const n=720;

procedure male (f1,f2,dPhase : real);    { Frequenz 1,2 und die
Phasenversch. }
var x,y : integer; { f r eine Linie }
    i   : integer; { Laufvariable }
    q: real;

BEGIN
    q:=1;
    while (xmax * q) > 0.5 do
        BEGIN
            for i := 0 to n do
                BEGIN
                    q:=q * exp(-k * i/n);
                    x := round( xmax * q * sin (2*pi*f1*i/n + dPhase));
                    y := round( ymax * q * sin (2*pi*f2*i/n));
                    if i = 0 then moveto( x + xmax,y+ymax)
                        else lineto( x + xmax,y+ymax);
                END;
            END;
        END;

procedure abfrage (var f1,f2,di:real);
var a:char;
    hilf:real;
Begin
writeln('Dieses Programm simuliert Lissajousfiguren. Wollen Sie die
Anfangsbedingungen festlegen? (j,n)');
if readkey = 'j' then
    begin
        writeln('Frequenz von Schwingung 1 ?(1..20)'); readln(f1);
        writeln('Frequenz von Schwingung 2 ?(1..20)'); readln(f2);
        writeln('Phasenverschiebung ? (in Grad 0..360)'); readln(hilf);
        di:=pi/180*hilf;
    end;
writeln('Bedienung während der Darstellung:');
writeln('* : Frequenz 1 + 1');
writeln('/ : Frequenz 1 - 1');
writeln('+ : Frequenz 2 + 1');
writeln('- : Frequenz 2 - 1');
writeln('a : größere Phasenverschiebung');
writeln('s : kleinere Phasenverschiebung');
writeln('f : größere Dämpfung');
writeln('d : kleinere Dämpfung');
writeln('Enter oder Esc : Ende');
readln;

end;

procedure Init;
var i : integer;
begin
    ymax := getmaxy div 2;
    xmax := ymax;
    ende := false;
end;

```

```

BEGIN {*Hauptprogram*}
  di := 0;
  f1 := 1;
  f2 := 1;
  k:=0.0005;
  demo:=false;
  abfrage(f1,f2,di);
  writeln('Wollen Sie in den 3D-Demo-Modus wechseln? (j,n)');
  if readkey = 'j' then Begin demo:=true; k:= 0.009; f1:=13; f2:=14;
end;
  gd := vga;
  gm := 2;
  initgraph (gd,gm,'');
  init;
  setbkcolor(0);
  setcolor(white);
  if demo then
  Begin
    repeat
      male(f1,f2,di);
      di := di + 0.05;
      if di > pi*2 then di := 0;
      clearviewport;
    until keypressed;
  end
else
  Begin
  male(f1,f2,di);
  repeat
    if keypressed then begin
      c := readkey;
      case c of
        #27 : ende := true;
        #13 : ende := true;
        '/' : f1 := f1 - 1;
        '*' : f1 := f1 + 1;
        '-' : f2 := f2 - 1;
        '+' : f2 := f2 + 1;
        'a' : di := di + 0.05;
        's' : di := di - 0.05;
        'd' : k := k*2;
        'f' : if k>0.0001 then k := k/2;
      end;
      clearviewport;
      male (f1,f2,di);
      end;
      if di > pi*2 then di := 0;
    until ende;
  closegraph;
  End;
end.

```

Dieses Programm basiert auf dem Quelltext der auf <http://pmp.purespace.de/> zum Download angeboten wird.

Literaturverzeichnis

Abkürzung	Quellenangabe
Fischer	Fischer, Udo: Schwingungen - Udo Fischer, Wolfgang Stephan (Lehr- und Handbuch der Ingenieurwissenschaften; Bd. 38), Basel usw. 1981.
Grimsehl	Schallenberg, W. (Hrsg.): Grimsehl Lehrbuch der Physik, Erster Band: Mechanik – Akustik – Wärmelehre, 21. Auflage, Leipzig 1971.
Himstedt	Himstedt, A.: Über Lissajous'sche Curven. Inaugural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürden der Hohen Philosophischen Facultät zu Göttingen, Freiburg 1884.
Gellert	Gellert, W. u.A. (Hrsg.): Handbuch der Mathematik, Köln o.J. (1960?)
Grehn	Grehn, J. (Hrsg.): Metzler Physik für den kursorientierten Unterricht in der gymnasialen Oberstufe, Stuttgart 1972.
Grehn/Krause	Grehn, J. / Kraus, J. (Hrsg.): Metzler Physik, 3. Auflage, Hannover 1998.
Meyers	Meyers Lexikonredaktion (Hrsg.): Schüler Duden Physik, 3. Auflage, Mannheim usw. 1995.
Pohl	Pohl, Robert Wichard: Mechanik · Akustik und Wärmelehre, 16. Auflage, Berlin usw. 1964.

Anmerkung zu den Verwendeten Internetseiten:

Alle Internetseiten die zitiert wurden, sind im Text mit einer Fußnote angegeben. Eine Kopie der verwendeten Internetseiten, sowie weitere interessante Seiten, die nicht für die Arbeit verwendet wurden, sind auf der beigelegten CD zu finden.